Préparation : Introduction à la géométrie algébrique

Martin Debaisieux

Dernière compilation le 14 novembre 2024

Ces notes, jointes à une formation élémentaire en Algèbre Commutative, constituent une révision des prérequis à l'Introduction à la Géométrie Algébrique selon le cours de M1 de Maja Volkov. Tous les anneaux considérés dans ce document sont supposés commutatifs.

Table des matières

Documentation

[1] James Milne – *Algebraic Geometry* (v6.20), disponible sur `https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/` (2017).

[2] Daniel Perrin – *Algebraic Geometry : An Introduction*, Universitext, Springer (2008).

[3] Maja Volkov – *Projet en géométrie algébrique*, cours de M1, Université de Mons, Belgique (2007).

※ Pour les ensembles algébriques affines

1.1 Idéaux radicaux

Définition 1.1. Le nilradical d'un anneau A est l'idéal composé des éléments nilpotents de A, noté $\mathrm{Nil}(A) := \{a \in A \mid \exists n \geqslant 1,\ a^n = 0\}$.

Il n'est peut-être pas aisé de montrer que cet ensemble est bel et bien un idéal de l'anneau ; nous donnerons plus tard un argument. Le nilradical d'un anneau mesure son défaut au fait d'être réduit : un anneau est réduit si et seulement si son nilradical est l'idéal nul.

Exemple 1.2. Soit $n \in \mathbf{Z}$ un entier non nul où $n = \pm p_1^{e_1} \cdots p_m^{e_m}$ est sa factorisation en nombres premiers, alors $\mathrm{Nil}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = (p_1 \cdots p_m)\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. En particulier, on retrouve le fait que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est réduit si et seulement si n est sans facteur carré.

Théorème 1.3 (de Krull)**.** Le nilradical d'un anneau A est l'intersection de tous ses idéaux premiers. En particulier, $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal de A.

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et soit $a \in \mathrm{Nil}(A)$. Comme $a^n = 0 \in \mathfrak{p}$ pour un certain $n \geqslant 1$ et que $\mathfrak{p}$ est premier, on en déduit que $a \in \mathfrak{p}$ et donc l'inclusion dans le sens de lecture.

Réciproquement, supposons A non nul, c'est-à-dire $\mathrm{Nil}(A) \neq A$. Soit $b \in A$ un élément non nilpotent et notons $S := b^{\mathbf{N}}$. Alors $X := \{\mathfrak{a} \text{ idéal de } A \mid \mathfrak{a} \cap S = \varnothing\}$ n'est pas vide et est inductivement ordonné. Le lemme de Zorn fournit l'existence d'un élément maximal $\mathfrak{p} \in X$, nécessairement un idéal premier (exercice). Par conséquent, pour chaque élément non nilpotent b de A, il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que $\mathfrak{p} \cap b^{\mathbf{N}}$ est vide. On en déduit l'assertion. □

Définition 1.4. Le radical d'un idéal $\mathfrak{a}$ d'un anneau A est l'idéal de A composés des racines des éléments de $\mathfrak{a}$, noté $\mathrm{Rad}(\mathfrak{a}) := \{a \in A \mid \exists n \geqslant 1,\ a^n \in \mathfrak{a}\}$.

Le nilradical d'un anneau est le radical de son idéal nul. Sous le morphisme de projection $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$, le radical de $\mathfrak{a}$ est envoyé sur $\mathrm{Nil}(A/\mathfrak{a})$. Du Théorème 1.3 nous déduisons que le radical de $\mathfrak{a}$ est l'intersection des idéaux premiers contenant $\mathfrak{a}$. En particulier, le radical d'un idéal est un idéal.

Exercice 1.5. Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ des idéaux d'un anneau A.

(1) Si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, alors $\mathrm{Rad}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{b})$. Montrer que la réciproque est fausse.

(2) $\mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}(\mathfrak{a})) = \mathrm{Rad}(\mathfrak{a})$.

Définition 1.6. Un idéal $\mathfrak{a}$ de A est radical s'il est égal à son radical, autrement dit si $A/\mathfrak{a}$ est réduit.

Les idéaux maximaux sont premiers et les premiers sont radicaux, mais chaque réciproque est fausse. Afin de préparer à la Géométrie Algébrique, on donne ici des contre-exemples avec $A = K[X, Y]$ où K est algébriquement clos. L'idéal (X, Y) est maximal, l'idéal (X) est premier mais n'est pas maximal et l'idéal (XY) est radical mais n'est pas premier.

Exercice 1.7. Soit A un anneau factoriel et soit $a \in A$ avec $a = u\pi_1^{e_1} \cdots \pi_m^{e_n}$ sa factorisation en irréductibles (où $u \in A^\times$). Montrer que $\mathrm{Rad}((a)) = (\pi_1 \cdots \pi_m)$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que (a) soit radical.

1.2 Irréductibilité topologique

Définition 1.8. Un espace topologique est irréductible s'il ne peut s'écrire comme l'union de deux de ses fermés non triviaux.

Par convention, nous dirons que l'espace vide n'est pas irréductible. Bien entendu, toute partie ouverte (et non vide) d'un espace topologique irréductible est également irréductible.

Exercice 1.9. Soit (X, T) un espace topologique, sont équivalents :

(1) L'espace (X, T) est irréductible.

(2) Toute paire d'ouverts de (X, T) est d'intersection non vide.

(3) Tout ouvert non vide de (X, T) est dense dans X.

Exemple 1.10. Dans un espace T_2 (= de Hausdorff), toute paire de points admet des voisinages ouverts disjoints en ces deux points. Ainsi, les seuls espaces irréductibles à être T_2 sont les singletons.

Proposition 1.11. Soit (X, T) un espace topologique noethérien, alors X est l'union finie de parties fermées irréductibles $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ pour $n \geqslant 1$. Cette décomposition est unique sous l'hypothèse d'absence d'inclusion entre les X_i et à ordre des éléments près.

Démonstration. Supposons que X ne peut s'écrire comme union finie d'irréductibles. Dès lors, il existe un sous-ensemble fermé non vide Y de (X, T) minimal parmi ceux ne pouvant s'écrire de cette manière. En particulier, Y n'est pas irréductible et donc $Y = F_1 \cup F_2$ pour des fermés propres F_1, F_2 de $(Y, T \cap Y)$. Par minimalité de Y, on a forcément que F_1 et F_2 sont des unions finies de sous-ensembles fermés irréductibles et donc Y aussi !

Pour l'unicité, supposons que $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ et $X = Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$ sont deux décompositions non redondantes de (X, T). Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$X_i = \bigcup_{j=1}^{m} (X_i \cap Y_j)$$

et puisque X_i est irréductible, nécessairement $X_i = X_i \cap Y_j$ pour un certain $j(i)$. On définit une application $j \colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ telle que $X_i \subseteq Y_{j(i)}$. Par analogie, on définit une application $i \colon \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ telle que $Y_j \subseteq X_{i(j)}$. De la non redondance, on obtient que i et j sont inverses l'une de l'autre et par conséquent que ces décompositions de (X, T) différent seulement par l'ordre dans lequel apparaissent les éléments. $\square$

Définition 1.12. Les composantes irréductibles d'un espace topologique noethérien sont les fermés apparaissant dans sa décomposition en irréductibles.

※ Pour les ensembles algébriques projectifs

2.1 Algèbres graduées et idéaux homogènes

Définition 2.1. Soit K un corps, une graduation sur une K-algèbre A est une famille $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de sous-K-espaces vectoriels de A satisfaisant :

(a) $A = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} A_n$ et

(b) pour tous $n, m \in \mathbf{N}$, le produit induit une application $A_n \times A_m \longrightarrow A_{n+m}$.

Une algèbre munie d'une graduation est une algèbre graduée. Un élément a d'un tel objet A s'écrit de manière unique $a = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ où les $a_n \in A_n$ sont nuls sauf un nombre fini. Ces termes non nuls sont les composantes homogènes de a, et les éléments de A_n sont dits homogènes de degré n.

Exemple 2.2. La définition précédente est directement motivée par la situation suivante, et la formalise. Étant donné un corps K, les polynômes homogènes donnent lieu degré par degré à une graduation sur $K[X_1, \ldots, X_n]$.

Exemple 2.3. On peut toujours munir une algèbre A d'une graduation, dite triviale, en considérant la famille $(A, 0, 0, 0, \ldots)$.

Définition 2.4. Un idéal d'une algèbre graduée est homogène s'il comprend chacune des composantes homogènes de ses éléments.

Dès lors, un idéal $\mathfrak{a}$ d'une algèbre graduée A est homogène si et seulement s'il se décompose en $\mathfrak{a} = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}}(A_i \cap \mathfrak{a})$.

Exemple 2.5. Soit K un corps. Dans l'algèbre $K[X, Y, Z]$ graduée usuellement, l'idéal engendré par $\{X^2+Y^2+Z^2, XY+YZ+XZ, Z^5\}$ est homogène mais pas celui engendré par $\{X + Y^2 + Z^2\}$.

Proposition 2.6. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal d'une algèbre graduée A, alors $\mathfrak{a}$ est homogène si et seulement s'il est engendré par des éléments homogènes de A.

Démonstration. Seul la nécessité requiert une justification. Soit $\mathfrak{b}$ l'idéal engendré par toutes les composantes homogènes des éléments présents dans $\mathfrak{a}$; il s'agit alors d'un idéal homogène contenu dans $\mathfrak{a}$. Toutefois, si $a \in \mathfrak{a}$ alors on a $a = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ où les $a_n \in \mathfrak{b}$ et donc $a \in \mathfrak{b}$. Par conséquent $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. □

Remarque 2.7. Si de plus A est noethérien, alors tout idéal homogène est engendré par un nombre fini d'éléments homogènes. C'est en particulier le cas de l'algèbre $K[X_1, \ldots, X_n]$ munie de sa graduation usuelle, où K est un corps.

Proposition 2.8. Soit $\mathfrak{h}$ un idéal homogène d'une algèbre graduée A, alors $\mathfrak{h}$ est premier si et seulement s'il vérifie la condition de primalité sur les éléments homogènes de A.

Démonstration. Supposons au contraire qu'il existe $a, b \in A$ dont seul le produit est dans $\mathfrak{h}$. Prenons ab minimal au sens du degré homogène $\deg(ab) := \deg(a) + \deg(b)$. Puisque $\mathfrak{h}$ est homogène, il comprend chacune des composantes homogènes de ab, en particulier $a_d b_{d'}$ où a_d et $b_{d'}$ sont respectivement les composantes homogènes de plus haut degré de a et b. Dès lors, l'un d'eux est dans $\mathfrak{h}$ – disons $a_d \in \mathfrak{h}$. Mais alors, l'élément $(a - a_d)b \in \mathfrak{h}$ et pourtant ni $(a - a_d)$ ni b appartient à $\mathfrak{h}$, venant contredire l'hypothèse de minimalité sur ab. □

Exercice 2.9. Montrer que la somme, le produit, l'intersection et le quotient (quand cela fait sens) d'idéaux homogènes est homogène. Montrer que le radical d'un idéal homogène est homogène.

※ Pour un peu de géométrie différentielle

3.1 Dimension topologique

Définition 3.1. La dimension (topologique) d'un espace topologique (X, T) non vide est le supremum de la longueur des chaînes de fermés irréductibles distincts de (X, T) et est notée $\dim(X)$.

Par convention, nous dirons qu'une chaîne $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_d$ de fermés irréductibles distincts est de longueur d et l'on pose la dimension de l'espace topologique vide -1. On vérifie facilement que deux espaces topologiques homéomorphes sont de même dimension.

Remarque 3.2. Si (X, T) est T_2 (= de Hausdorff), alors sa dimension topologique est nulle. Cette notion est donc utile seulement pour certaines topologies, comme celle de Zariski.

Proposition 3.3. Soit (X, T) un espace topologique et soit Y un sous-espace topologique non vide de (X, T), alors $\dim(Y) \leqslant \dim(X)$. Si de plus (X, T) est irréductible et Y est fermé, alors $\dim(Y) \leqslant \dim(X) - 1$.

Démonstration. Soit $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_d$ une chaîne de fermés irréductibles distincts de $(Y, T \cap Y)$ et notons C_n l'adhérence de F_n dans (X, T) pour tout n. On peut montrer (exercice) que les C_n sont irréductibles et donc $C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_d$ est une chaîne de fermés irréductibles distincts de (X, T). La seconde assertion suit, en ajoutant X aux chaînes de Y. □

Proposition 3.4. Soit (X, T) un espace topologique non vide. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des fermés tels que $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$, alors $\dim(X) = \max\{\dim(X_1), \ldots, \dim(X_n)\}$.

Démonstration. On peut supposer que les X_i ne sont pas vides. Soit m le maximum de leur dimension, on a $m \leqslant \dim(X)$ par 3.3. Pour la réciproque, si $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_d$ est une chaîne de fermés irréductibles distincts de (X, T), alors

$$F_d = F_d \cap X = \bigcup_{i=1}^{n} (F_d \cap X_i)$$

et donc il existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ pour lequel $F_d \subseteq X_i$ par irréductibilité de F_d. Nous en déduisons que $\dim(X) = m$. □

3.2 Dimension de Krull et hauteur

Définition 3.5. La dimension de Krull d'un anneau A est le supremum des longueurs des chaînes d'idéaux premiers distincts de A et est notée $\dim_{\mathrm{K}}(A)$.

Exemple 3.6. La dimension de Krull de tout corps est nulle, et il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante pour être un corps parmi les anneaux intègres. De façon plus générale, si A est principal alors $\dim_{\mathrm{K}}(A) \leqslant 1$. En effet, les idéaux premiers non nuls sont maximaux dans de tels anneaux. En particulier, $\dim_{\mathrm{K}}(\mathbf{Z}) = 1$ et $\dim(\mathbf{Z}[i]) = 1$ où $i \in \mathbf{C}$ est tel que $i^2 = -1$.

Exercice 3.7. Soit A un anneau intègre qui est une algèbre sur un corps K. Une fois le lemme de Normalisation de Noether connu, montrer que la dimension de Krull de A vaut le degré de transcendence de $\mathrm{Frac}(A)/K$. En déduire que la dimension de Krull de $K[X_1, \ldots, X_n]$ vaut n.

Définition 3.8. La hauteur $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ d'un anneau A est le supremum des longueurs des chaînes d'idéaux premiers distincts de A contenus dans $\mathfrak{p}$.

En d'autres mots, la hauteur d'un idéal premier est la dimension de Krull en son localisé. On peut définir les notions dans l'autre sens : d'abord la hauteur d'un idéal premier, ensuite la dimension de Krull par le supremum des hauteurs des idéaux maximaux.

Proposition 3.9. Soient A un anneau factoriel et π un irréductible de A, alors πA est de hauteur 1.

Démonstration. Nous considérons $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A strictement contenu dans πA et montrons que $\mathfrak{p} = 0$. Si $a \in \mathfrak{p}$, alors $a = \pi b$ pour un certain $b \in A$. Puisque l'on a nécessairement $\pi \notin \mathfrak{p}$ et que $\mathfrak{p}$ est premier, alors $b \in \mathfrak{p}$. En répétant ce processus sur b, nous montrons que π^n divise a pour tout $n \geqslant 1$ et donc que $a = 0$. □

Exercice 3.10. Étant donné un idéal premier $\mathfrak{p}$ d'un anneau A, montrer que l'inégalité $\dim_{\mathrm{K}}(A) \geqslant \dim_{\mathrm{K}}(A/\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ est satisfaite. L'inégalité réciproque est également vraie si l'on suppose A noethérien (admis). En utilisant la Proposition 3.9, en déduire que $\dim_{\mathrm{K}}(\mathbf{Z}[X]) = 2$.