Chap I. INITIATION À L'ALGÈBRE CATÉGORIQUE

Martin Debaisieux, Valentin Dusollier

1 Catégories localement petites

Définition 1.1. Une *catégorie* $\mathbf{C}$ est la donnée d'une collection d'objets $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, d'une collection de morphismes (ou flèches) $\mathrm{Mor}(A, B)$ de A dans B pour toute paire d'objets A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ et d'une loi de composition

$$\mathrm{Mor}(B, C) \times \mathrm{Mor}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Mor}(A, C) \colon (g, f) \longmapsto g \circ f$$

pour tous objets A, B, $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ satisfaisant les axiomes suivants :

- (i) deux collections $\mathrm{Mor}(A, B)$ et $\mathrm{Mor}(A', B')$ sont disjointes à moins que $A = A'$ et $B = B'$; auquel cas elles sont égales,
- (ii) pour chaque objet $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, il existe un morphisme $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Mor}(A, A)$ servant de neutre à gauche et à droite pour les éléments de $\mathrm{Mor}(A, B)$ et $\mathrm{Mor}(B, A)$ respectivement, et
- (iii) la loi de composition est associative, *i.e.* pour tous morphismes $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$ et $h \in \mathrm{Mor}(C, D)$,
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$
et cela pour n'importe quels objets A, B, C, $D \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$.

Exemple 1.2. Un premier exemple fondamental de catégorie est celle constituée des ensembles et des applications entre eux, notée usuellement **Ens**.

Exemple 1.3. Une restriction peut être effectuée en considérant la catégorie des ensembles finis et des applications entre ceux-ci, notée $\mathbf{Ens}_{\mathrm{fini}}$. Cette catégorie a la particularité que sa collection d'objets, ainsi que sa collection de morphismes constituent chacun un ensemble.

Remarque 1.4. Ces deux premiers exemples de catégories possèdent une différence de taille (dans les deux sens du terme) : celle-ci réside dans la nature de la collection des objets et de la collection des morphismes. En pratique, il est plus aisé de manipuler des catégories "plus petites", dans lesquelles des restrictions plus ou moins fortes sont apportées à ces collections.

Définition 1.5. Une catégorie est *petite* si sa collection d'objets et sa collection de morphismes sont tous deux des ensembles. Elle est dite *grande* sinon.

Remarque 1.6. Bien que plus maniable, cette définition exclut bon nombre de structures que nous souhaitons être des catégories "praticables". Une restriction plus élaborée s'impose, donnant lieu à la définition 1.7. Sauf mention contraire, les catégories dont nous discuterons seront supposées de cette forme.

Définition 1.7. Une catégorie $\mathbf{C}$ est *localement petite* si, pour tous objets A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, la collection de morphismes $\mathrm{Mor}(A, B)$ est un ensemble.

Exemple 1.8. Les catégories d'ensembles munis d'une structure et d'applications préservant cette structure. Parmi-elles, nous comptons les catégories (localement petites) suivantes :

— La catégorie des monoïdes et des morphismes de monoïdes, notée **Mon**.
— La catégorie des groupes et des morphismes de groupes, notée **Grp**.
— La catégorie des anneaux et des morphismes d'anneaux, notée **Ann**.
— La catégorie des modules sur un anneau commutatif A et des applications A-linéaires, notée $\mathbf{Mod}_A$.
— La catégorie des algèbres de Boole et des morphismes d'algèbres de Boole, notée **Bool**.
— La catégorie des graphes et des morphismes de graphes, notée **Grph**.
— La catégorie des espaces métriques E et des applications de classe C^n (où $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$) sur E, notée $\mathbf{C}^n$.
— La catégorie des espaces topologiques et des applications continues, notée **Top**.
— La catégorie des ensembles partiellement ordonnés et des applications croissantes, notée **Pord**.
— La catégorie des espaces mesurés et des fonctions mesurables, notée **Mes**.

Remarque 1.9. Comme vous pouvez le constater, les catégories ont toujours été omniprésentes autour de nous. Le formalisme de la théorie des catégories permet d'unifier tous les exemples précédents et de raisonner à un haut degré de généralité. Une attention particulière doit être portée à la définition 1.1 : les objets d'une catégorie ne sont pas nécessairement des ensembles et les morphismes d'une catégorie ne sont pas non plus nécessairement des applications. Nous allons à présent discuter de telles catégories.

Exemple 1.10. La catégorie **Rel** des relations binaires, dont les objets sont les ensembles et les flèches sont les relations binaires, *i.e.* $R\colon A \to B$ est un sous-ensemble $R \subseteq A \times B$. La flèche identité sur un ensemble A est la relation

$$\mathrm{Id}_A = \{(a,a) \in A \times A \mid a \in A\} \subseteq A \times A,$$

i.e. Id_A est la diagonale principale de $A \times A$. Étant donné $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$, la composition $S \circ R$ est définie par

$$(a,c) \in S \circ R \quad \text{ssi} \quad \exists\, b \text{ tel que } (a,b) \in R \text{ et } (b,c) \in S.$$

Exemple 1.11. Un ensemble P muni d'une relation binaire $\leq$ est préordonné si la relation est réflexive et transitive. Tout ensemble préordonné P peut être vu comme une catégorie à part entière dont les objets sont les éléments de P et l'unique flèche entre paire d'objets est déterminée par

$$a \to b \quad \text{ssi} \quad a \leq b. \tag{1}$$

Les conditions de réflexivité et de transitivité assurent qu'il s'agisse bien d'une catégorie.

Remarque 1.12. Réciproquement, toute catégorie avec au plus une flèche par paire d'objets détermine un ensemble préordonné, simplement en définissant la relation sur les objets de la même manière qu'en (1).

Exemple 1.13. Étant donné un système déductif logique, une catégorie de preuves, notée **Prv**, peut être associées en définissant les objets comme les formules ϕ, ψ, … et les flèches $\phi \to \psi$ comme une déduction de ψ à partir de ϕ :

$$\frac{\dfrac{\phi}{\vdots}}{\psi}$$

La composition des flèches est donnée par la juxtaposition des déductions. L'identité Id_ϕ est simplement la déduction triviale $\phi \vdash \phi$. Remarquons qu'il y a autant de flèches $\phi \to \psi$ entre deux formules qu'il y a de preuves de ψ à partir de ϕ.

Exemple 1.14. Tout monoïde $(M, \cdot)$ peut être associé à une catégorie possédant un unique objet et dont les flèches sont les éléments de M. Il s'agit d'une petite catégorie. En particulier, la flèche identité est l'élément neutre de M. La composition des flèches est quant-à-elle l'opération binaire $m \cdot n$ du monoïde.

$$\begin{tikzcd} * \arrow[loop left, "0 \bmod 4\mathbf{Z}"] \arrow[loop above, "1 \bmod 4\mathbf{Z}"] \arrow[loop right, "2 \bmod 4\mathbf{Z}"] \arrow[loop below, "3 \bmod 4\mathbf{Z}"] \end{tikzcd}$$

Figure 1 – Diagramme de la catégorie associée au monoïde $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, +)$.

Exemple 1.15. Les (petites) catégories, dites *finies.* De telles catégories ne nécessitent pas que les objets soient des ensembles et que les morphismes soient des applications.

— La catégorie **1**, ressemblant à

$$\begin{tikzcd} * \arrow[loop left] \end{tikzcd}$$

Celle-ci est composée d'exactement un objet, ainsi que de la flèche identité sur celui-ci.

— La catégorie **2**, ressemblant à

$$\begin{tikzcd} * \arrow[loop left] \arrow[r] & \star \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Celle-ci est composée de deux objets, de deux flèches identités et d'exactement une flèche du premier vers le second objet.

— La catégorie **3**, ressemblant à

$$\begin{tikzcd} * \arrow[loop left] \arrow[r] \arrow[dr] & \star \arrow[loop right] \arrow[d] \\ & \dagger \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Celle-ci est composée de trois objets, ainsi que de trois flèches identités. Il y a exactement une flèche du premier objet vers le deuxième et exactement une flèche du deuxième vers le troisième ; ceci donne alors lieu, par composition, à une flèche supplémentaire du premier objet vers le troisième.

— La catégorie **0**, ressemblant à

Celle-ci n'est composée d'aucun objet et d'aucune flèche.

Exemple 1.16. La catégorie $\mathbf{Ens}_*$ des ensembles pointés dont les objets (A, a) sont les ensembles A muni d'un point *distingué* a de A et dont les flèches sont les applications préservant l'élément distingué.

Exemple 1.17. La catégorie **Par** des ensembles et des applications partielles. Un morphisme de A dans B est une application définie sur un sous-ensemble (potentiellement strict) de A et à valeur dans B ; le morphisme identité Id_A est l'application identité totale (*i.e.* où le sous-ensemble en question est A) sur A. La composition de tels morphismes est la composition d'applications partielles.

2 Sous-catégories

Définition 2.1. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Une *sous-catégorie* $\mathbf{S}$ de $\mathbf{C}$ est composée d'une sous-collection $\mathrm{Ob}(\mathbf{S})$ d'objets de $\mathbf{C}$, et d'une collection de morphismes $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(A,B)$ pour toute paire d'objets A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{S})$ vérifiant

(*i*) pour tout objet $A \in \mathrm{Ob}(S)$, le morphisme identité Id_A est un élément de $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(A,A)$, et

(*ii*) la composition des morphismes est stable, *i.e.* quels que soient les morphismes $f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(A,B)$ et $g \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(B,C)$, $g \circ f$ appartient à $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(A,C)$ pour n'importe quels objets A, B, $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{S})$.

Définition 2.2. Une *sous-catégorie pleine* $\mathbf{S}$ de $\mathbf{C}$ est une sous-catégorie de $\mathbf{C}$ où pour chaque paire d'objets A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{S})$:

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(A,B) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,B).$$

Remarque 2.3. Toute sous-catégorie d'une catégorie est elle même une catégorie ; en particulier les exemples suivants constituent une nouvelle vague d'exemples de catégories.

Exemple 2.4. La catégorie des ensembles finis $\mathbf{Ens}_{\mathrm{fini}}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles $\mathbf{Ens}$. En revanche, la catégorie dont les objets sont les ensembles finis et dont les morphismes sont les applications injectives (resp. surjectives, bijectives) est une sous-catégorie non pleine de $\mathbf{Ens}$.

Exemple 2.5. La catégorie des groupes abéliens $\mathbf{Ab}$ forme une sous-catégorie pleine de la catégorie des groupes $\mathbf{Grp}$. Également, la catégorie des corps $\mathbf{Crps}$ est une sous-catégorie pleine de celle des anneaux $\mathbf{Ann}$.

Exemple 2.6. La chaîne $\mathbf{C}^0 \supset \mathbf{C}^1 \supset \cdots \supset \mathbf{C}^\infty$ fournit des exemples de sous-catégories non pleines.

Exemple 2.7. La sous-catégorie des tautologies (des formules toujours vraies) est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Prv}$. Notez que $\mathrm{Mor}(\phi,\psi)$ est non vide pour n'importe quelle paire de formules ϕ et ψ de cette catégorie.

3 Isomorphismes

Définition 3.1. Dans une catégorie $\mathbf{C}$, un morphisme $f\colon A \to B$ est appelé *isomorphisme* s'il existe un morphisme $g\colon B \to A$ de $\mathbf{C}$ tel que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_B\,.$$

Propriété 3.2. Le morphisme précédent $g\colon B \to A$ est unique ; nous le notons $g = f^{-1}$.

Remarque 3.3. Contrairement à certaines catégories (comme $\mathbf{Grp}$, $\mathbf{Ann}$ et $\mathbf{Mod}_A$, où A est un anneau commutatif), il n'est en général pas vrai que les isomorphismes sont des morphismes bijectifs. En effet, rien ne garantit qu'une application continue bijective soit bicontinue.

Exemple 3.4. Dans la catégorie $\mathbf{Prv}$, une flèche $\phi \to \psi$ est un isomorphisme si et seulement si ϕ et ψ sont deux formules équivalentes (*i.e.* $\phi \vdash \psi$ et $\psi \vdash \phi$).

Exemple 3.5. Une flèche m dans une catégorie du type de l'exemple 1.14 est un isomorphisme si et seulement s'il existe une flèche n telle que $m \cdot n = n \cdot m = e$, ou encore si et seulement si m est inversible.

Remarque 3.6. Soit A un objet d'une catégorie localement petite $\mathbf{C}$. L'ensemble $\mathrm{Mor}(A,A)$ est parfois désigné par $\mathrm{End}(A)$: l'ensemble des endomorphismes de A. De plus, la structure $(\mathrm{Aut}(A),\circ)$ forme un groupe, dans lequel $\mathrm{Aut}(A)$ est le sous-ensemble de $\mathrm{End}(A)$ constitué des isomorphismes.

4 Foncteurs

Définition 4.1. Un *foncteur covariant* $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ entre deux catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ est une association d'objets à objets et de flèches à flèches telle que

(*i*) $F(f\colon A \to B) = F(f)\colon F(A) \to F(B)$,

(*ii*) $F(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{F(A)}$, et

(*iii*) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Remarque 4.2. Un foncteur covariant $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est donc une application préservant le domaine et le codomaine des morphismes, les morphismes d'identités et la composition. L'image de $\mathbf{C}$ par un tel foncteur donne lieu à une représentation de cette catégorie, potentiellement déformée, dans $\mathbf{D}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "F"] & \mathbf{D} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F(B) \arrow[d, "F(g)"] \\ F(A) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[r, "F(g\circ f)"] & F(C) \end{tikzcd}$$

Exemple 4.3. Pour toute catégorie $\mathbf{C}$, le foncteur d'identité $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, envoyant tout objet et tout morphisme de $\mathbf{C}$ sur lui-même.

Exemple 4.4. Pour toutes catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$, où $\mathbf{D}$ est non vide, le foncteur constant, envoyant tout objet de $\mathbf{C}$ sur un objet fixé A de $\mathbf{D}$ et envoyant tout morphisme sur le morphisme identité Id_A.

Exemple 4.5. Le foncteur $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ens}$, envoyant chaque groupe sur son ensemble sous-jacent et chaque morphisme de groupe sur l'application sous-jacente porte le nom de *foncteur d'oubli*. De tels foncteurs apparaissent également au niveau de $\mathbf{Ann} \to \mathbf{Grp}$, $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Grp}$, où A est un anneau commutatif, $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Mon}$, etc. Notez que la composition de tels foncteurs est également un foncteur d'oubli.

Exemple 4.6. L'application envoyant chaque espace vectoriel sur son espace bidual et chaque application linéaire sur son bidual est un foncteur covariant de la catégorie des espaces vectoriels sur un corps fixé vers elle-même.

Exemple 4.7. Soit A un anneau commutatif. Le produit tensoriel de deux A-modules $M \otimes N$ définit un foncteur $\mathbf{Mod}_A \times \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Mod}_A$ (cfr produit de catégories) en chacune des variables. Un tel foncteur porte le nom de *bifoncteur*.

Exemple 4.8. Au même titre que tout monoïde – merci au foncteur d'oubli –, tout groupe G peut être vu comme une catégorie formée d'un seul objet et dont les flèches sont les éléments de G. Une application $G \to \mathbf{Ens}$ n'est rien d'autre qu'une action du groupe G sur un ensemble particulier.

Propriété 4.9. *Tout foncteur covariant* $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *transforme chaque diagramme commutatif de* $\mathbf{C}$ *en un diagramme commutatif de* $\mathbf{D}$.

Preuve. Conséquence immédiate de la définition 4.1. □

Corollaire 4.10. *Tout foncteur covariant* $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *envoie les isomorphismes* f *de* $\mathbf{C}$ *sur les isomorphismes de* $\mathbf{D}$*, avec* $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$.

Remarque 4.11. Il est aisé de constater que la composition de foncteurs est un foncteur et que pour toute catégorie $\mathbf{C}$, le foncteur de l'exemple 4.3 joue le rôle de morphisme identité. Ainsi, lorsque nous considérons la collection des petites catégories, nous obtenons une nouvelle catégorie, grande cette fois, et par conséquent elle ne s'appartient pas. Dans le but d'éviter un problème analogue au paradoxe de Russel, nous ne considérerons pas la "catégorie de toutes les catégories".

Exemple 4.12. La catégorie des petites catégories, notée **Cat**, est la (grande) catégorie dont les objets sont les petites catégories et dont les morphismes sont les foncteurs entre celles-ci.

Remarque 4.13. Il est d'usage en pratique de nommer les foncteurs covariants simplement par foncteurs. L'emploi de cet adjectif permet cependant de distinguer ceux-ci des foncteurs contravariants. Informellement, il s'agit de foncteurs renversant le sens des flèches. Cette notion prendra plus de sens dans la section suivante, lorsque nous discuterons des catégories duales.

Définition 4.14. Un *foncteur contravariant* $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ entre deux catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ est une association d'objets à objets et de flèches à flèches telle que

(*i*) $F(f\colon A \to B) = F(f)\colon F(B) \to F(A)$,

(*ii*) $F(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{F(A)}$, et

(*iii*) $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Remarque 4.15. Si nous nous intéressons au diagramme commutatif qui fait suite, un foncteur contravariant se comporte de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "F"] & \mathbf{D} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F(B) \arrow[dl, "F(f)"'] \\ F(A) & F(C) \arrow[l, "F(g\circ f)"'] \arrow[u, "F(g)"'] \end{tikzcd}$$

Exemple 4.16. L'application envoyant chaque espace vectoriel sur son espace dual et chaque application linéaire sur sa duale est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces vectoriels sur un corps fixé vers elle-même.

Exemple 4.17. Le foncteur contravariant des parties $\mathcal{P}\colon \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}$, envoyant chaque ensemble sur l'ensemble de ses parties et chaque application $f\colon X \to Y$ vers son image réciproque $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$.

Exemple 4.18. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie localement petite et soient deux objets A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$; alors $\mathrm{Mor}(A, -)$ (resp. $\mathrm{Mor}(-, B)$) est un foncteur covariant (resp. contravariant) de $\mathbf{C}$ dans la catégorie des ensembles **Ens** : si $f\colon X \to Y$ est un morphisme de $\mathbf{C}$, alors le foncteur $\mathrm{Mor}(A, -)$ envoie f sur

$$\mathrm{Mor}(A, X) \longrightarrow \mathrm{Mor}(A, Y)\colon h \longmapsto f \circ h$$

tandis que le foncteur $\mathrm{Mor}(-, B)$ envoie f sur

$$\mathrm{Mor}(Y, B) \longrightarrow \mathrm{Mor}(X, B)\colon h \longmapsto h \circ f.$$

Notez que le foncteur dual de l'exemple 4.16 est précisément $\mathrm{Mor}(-, K)$ où K est le corps des scalaires.

5 Construction sur les catégories

Définition 5.1. Le *produit de deux catégories* $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$, noté $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, est composé des objets de la forme (C, D) pour $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ et $D \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ ainsi que des morphismes de la forme $(f, g)\colon (C, D) \to (C', D')$ pour tous $f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(C, C')$ et $g \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(D, D')$. La composition s'effectue composante par composante et l'élément identité de (C, D) est $(\mathrm{Id}_C, \mathrm{Id}_D)$.

Remarque 5.2. Le produit de deux catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ est muni de deux foncteurs, dits *de projections* $\pi_{\mathbf{C}}$ et $\pi_{\mathbf{D}}$:

$$\mathbf{C} \xleftarrow{\ \pi_{\mathbf{C}}\ } \mathbf{C} \times \mathbf{D} \xrightarrow{\ \pi_{\mathbf{D}}\ } \mathbf{D}$$

où $\pi_{\mathbf{C}}(C, D) = C$ pour tout objet de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ et $\pi_{\mathbf{C}}(f, g) = f$ pour tout morphisme de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$; le foncteur $\pi_{\mathbf{D}}$ se définit similairement.

Exemple 5.3. Soient G et H deux groupes vus chacun comme une catégorie. Le produit $G \times H$ est le produit direct de ces deux groupes.

Définition 5.4. La *catégorie opposée* (ou *duale*) $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ d'une catégorie $\mathbf{C}$ est composée des mêmes objets que $\mathbf{C}$, et les morphismes $f\colon C \to D$ de $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ sont les morphismes $f\colon D \to C$ de $\mathbf{C}$. Moins formellement, elle consiste a retourner les flèches de $\mathbf{C}$.

Remarque 5.5. Afin de distinguer les objets et les flèches dans $\mathbf{C}$ de leur associé dans $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$, nous écrivons

$$f^*\colon D^* \longrightarrow C^* \quad \text{dans } \mathbf{C}^{\mathrm{op}}$$

pour $f\colon C \to D$ dans $\mathbf{C}$. Ces notations nous permettent plus facilement de définir la composition et les identités dans $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ en se ramenant à $\mathbf{C}$: $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$ et $\mathrm{Id}_{C^*} = (\mathrm{Id}_C)^*$. Par conséquent, au niveau des diagrammes commutatifs :

$$\text{Dans } \mathbf{C} : \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \text{Dans } \mathbf{C}^{\mathrm{op}} : \quad \begin{tikzcd} A^* & B^* \arrow[l, "f^*"'] \\ & C^* \arrow[u, "g^*"'] \arrow[ul, "f^*\circ g^*"] \end{tikzcd}$$

Exemple 5.6. Au même titre que tout ensemble préordonné, tout ensemble P partiellement ordonné pour $\leq$ peut-être vu comme une catégorie dont les objets sont les éléments de P et les flèches sont déterminées par $\leq$. La catégorie duale est l'ensemble partiellement ordonné P par la relation $\geq$:

$$x \geq y \quad \text{ssi} \quad y \leq x.$$

Exemple 5.7. Toute catégorie du type de l'exemple 1.14 reste inchangée au passage du dual étant donné que chaque flèche est un endomorphisme.

Remarque 5.8. De façon équivalente à la définition 4.14, les foncteurs contravariants peuvent être définis à partir des foncteurs covariants et de la notion de catégorie duale :

Définition 5.9 (reformulation)**.** Un *foncteur contravariant* $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ entre deux catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ est un foncteur covariant de la catégorie $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ dans $\mathbf{D}$.

Exemple 5.10. Poursuivons l'exemple 4.18. Soient quatre objets A, A', B et B' d'une catégorie localement petite $\mathbf{C}$. Toute paire de morphismes $f\colon A \to A'$ et $g\colon B \to B'$ fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(A, B) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{Mor}(A', B) \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{Mor}(A, B') \arrow[r, "f"] & \mathrm{Mor}(A', B'). \end{tikzcd}$$

La commutativité de ce diagramme implique que $\mathrm{Mor}(-,-)\colon \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$ est un bifoncteur contravariant en le premier argument et covariant en le second. De façon équivalente, $\mathrm{Mor}(-,-)\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$ est un bifoncteur covariant en chaque argument.

6 Construction dans les catégories

Définition 6.1. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie, et soient deux objets A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Un *produit* de A et B est un objet P de $\mathbf{C}$ muni de morphismes $p_A \colon P \to A$ et $p_B \colon P \to B$ satisfaisant la propriété universelle : pour tout objet X de $\mathbf{C}$ et toute paire de morphismes $f_A \colon X \to A$ et $f_B \colon X \to B$, il existe un unique morphisme $u \colon X \to P$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "f_B"] & \\
A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Proposition 6.2. *Lorsqu'un produit existe entre deux objets, celui-ci est unique à unique isomorphisme près.*

Preuve. Supposons que $(P, (p_A, p_B))$ et $(Q, (f_A, f_B))$ sont deux produits de A et B. Une application successive de la propriété universelle du produit fournit l'existence d'un unique morphisme $u \colon Q \to P$ et d'un unique morphisme $u' \colon P \to Q$ faisant commuter leur diagramme respectif. Comme à la fois $f_A \circ u' \circ u = f_A$ et $f_B \circ u' \circ u = f_B$, et à la fois $f_A \circ \mathrm{Id}_Q = f_A$ et $f_B \circ \mathrm{Id}_Q = f_B$, la condition d'unicité de la propriété universelle (appliquée à Q et lui-même) implique que $u' \circ u = \mathrm{Id}_Q$. Similairement $u \circ u' = \mathrm{Id}_P$; ainsi $u \colon Q \to P$ est un isomorphisme. □

Remarque 6.3. Au vu de la proposition 6.2, nous parlerons *du* produit de A et B lorsque celui-ci existe et nous le noterons $A \times B$ (ou parfois $A \amalg B$). Les morphismes p_A et p_B sont appelés *morphismes de projection*. Plus généralement :

Définition 6.4. Étant donné une famille quelconque d'objets $(A_i)_{i \in I}$ d'une catégorie $\mathbf{C}$, le *produit* de la famille $(A_i)_{i \in I}$ est un objet P de $\mathbf{C}$ (usuellement noté $\prod_{i \in I} A_i$) muni d'une famille de morphismes $(p_i \colon P \to A_i)_{i \in I}$ satisfaisant la propriété universelle : pour tout objet X de $\mathbf{C}$ et toute famille de morphismes $(f_i \colon X \to A_i)_{i \in I}$, il existe un unique morphisme $f \colon X \to P$ tel que $p_i \circ u = f_i$ pour tout $i \in I$.

Exemple 6.5. Dans la catégorie des ensembles **Ens**, la notion de produit est matérialisée par le produit cartésien et les morphismes de projections sont donnés par les projections sur une composante fixée. En effet, considérons une famille d'ensembles $(S_i)_{i \in I}$. Soit X un ensemble muni d'une famille d'applications $(f_i \colon X \to S_i)_{i \in I}$; il existe alors une application $u \colon X \to \prod_{i \in I} S_i$ donnée par

$$x \longmapsto (f_i(x))_{i \in I}$$

faisant commuter le diagramme, *i.e.* telle que $p_i \circ u = f_i$ pour tout $i \in I$ (où p_i désigne la projection sur la i-ème composante). Cette application est unique puisque tout $u' \colon X \to \prod_{i \in I} S_i$ partageant les mêmes propriétés vérifie pour n'importe quel $x \in X$:

$$p_i \circ u(x) = f_i(x) = p_i \circ u'(x); \quad i \in I.$$

Ainsi $u(x)$ et $u'(x)$ ont les mêmes composantes dans $\prod_{i \in I} S_i$; ils sont donc égaux.

Exemple 6.6. Le produit dans les ensembles structurés tels que les monoïdes, les groupes, les anneaux, les espaces vectoriels sur un corps fixé ou encore les modules sur un anneau commutatif peut être construit sur base du produit de l'ensemble sous-jacent et en définissant les opérations composante par composante : c'est la notion de produit direct. Les morphismes de projections sont naturellement ceux donnés par les projections sur une composante fixée.

Remarque 6.7. Dans la catégorie des corps **Crps**, le produit $\mathbf{Q} \times \mathbf{F}_p$ n'existe pas puisqu'il n'existe aucun corps avec un morphisme à la fois vers $\mathbf{Q}$ et à la fois vers $\mathbf{F}_p$.

Exemple 6.8. Dans la catégorie des espaces topologiques, le produit est l'espace topologique dont l'ensemble est formé du produit cartésien et dont la topologie est la topologie produit. Rappelons que la topologie produit est la moins fine rendant les projections continues.

Exemple 6.9. Le produit dans la catégorie des petites catégories **Cat** est donné par la définition 5.1 ; il s'agit d'un cas particulier puisque celui-ci est défini pour n'importe quelle taille de catégories.

Proposition 6.10. Deux flèches $f\colon A \to A'$ et $g\colon B \to B'$ donne lieu (si les produits existent) à une unique flèche

$$f \times g\colon A \times B \to A' \times B'.$$

Preuve. En utilisant la propriété universelle du produit avec $A' \xleftarrow{f\circ\pi_A} A \times B \xrightarrow{g\circ\pi_B} B'$. □

Proposition 6.11. *Un couple $(P, (p_A, p_B))$ est le produit de A et B si et seulement si pour tout objet X, $\upsilon_X\colon \operatorname{Mor}(X, P) \to \operatorname{Mor}(X, A) \times \operatorname{Mor}(X, B)\colon u \mapsto (p_A \circ u, p_B \circ u)$ est bijective.*

Preuve. La propriété universelle du produit fournit exactement que quelle que soit la paire de morphismes $(f_A, f_B) \in \operatorname{Mor}(X, A) \times \operatorname{Mor}(X, B)$, il existe un unique morphisme $u \in \operatorname{Mor}(X, P)$ satisfaisant $\upsilon_X(u) = (f_A, f_B)$; c'est-à-dire υ_X est bijective. □

Exemple 6.12. Dans la catégorie des relations binaires **Rel**, le produit est donné par la réunion disjointe : si A et B sont deux ensembles, alors pour tout ensemble X

$$\begin{aligned}\operatorname{Mor}(X, A \sqcup B) &= \mathcal{P}(X \times (A \sqcup B)) \simeq \mathcal{P}((X \times A) \sqcup (X \times B)) \\ &\simeq \mathcal{P}(X \times A) \times \mathcal{P}(X \times B) = \operatorname{Mor}(X, A) \times \operatorname{Mor}(X, B).\end{aligned}$$

Définition 6.13. Soit **C** une catégorie, et soient deux objets A, $B \in \operatorname{Ob}(\mathbf{C})$. Un *coproduit* de A et B est un objet Q de **C** muni de morphismes $q_A\colon A \to Q$ et $q_B\colon B \to Q$ satisfaisant la propriété universelle : pour tout objet X de **C** et toute paire de morphismes $f_A\colon A \to X$ et $f_B\colon B \to X$, il existe un unique morphisme $u\colon Q \to X$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "f_A"] \arrow[r, "q_A"] & Q \arrow[u, dashed, "u"'] & B \arrow[ul, "f_B"'] \arrow[l, "q_B"'] \end{tikzcd}$$

Remarque 6.14. Lorsqu'un coproduit existe entre deux objets, celui-ci est unique à unique isomorphisme près : la preuve est similaire à celle donnée en 6.2. Nous parlerons ainsi *du* coproduit de A et B lorsque celui-ci existe et nous le noterons $A \amalg B$. Les morphismes q_A et q_B sont appelés *injections canoniques*, bien que rien ne garantit qu'elles soient injectives. À nouveau, cette notion se généralise à une famille quelconque d'objets :

Définition 6.15. Étant donné une famille d'objets $(A_i)_{i\in I}$ d'une catégorie **C**, le *coproduit* de la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un objet Q de **C** (usuellement noté $\coprod_{i\in I} A_i$) muni d'une famille de morphismes $(q_i\colon A_i \to X)_{i\in I}$ satisfaisant la propriété universelle : pour tout objet X et toute famille de morphismes $(f_i\colon A_i \to X)_{i\in I}$, il existe un unique morphisme $u\colon Q \to X$ tel que $u \circ q_i = f_i$ pour tout $i \in I$.

Remarque 6.16. Les lecteurs attentifs remarqueront que le coproduit est le produit dans la catégorie duale et vice versa. De façon analogue à la proposition 6.11, nous obtenons :

Proposition 6.17. *Un couple $(Q, (q_A, q_B))$ est le coproduit de A et B si et seulement si pour tout objet X, l'application canonique $\operatorname{Mor}(Q, X) \to \operatorname{Mor}(A, X) \times \operatorname{Mor}(B, X)$ est bijective.*

Exemple 6.18. Dans la catégorie des ensembles **Ens**, le coproduit est la réunion disjointe. En effet, considérons une famille d'ensembles $(S_i)_{i\in I}$ que nous supposons disjoints (sinon nous pouvons construire une bijection vers une famille disjointe). Soit X un ensemble muni d'une famille de morphismes $(f_i\colon S_i \to X)_{i\in I}$; il existe alors un morphisme $u\colon \bigsqcup_{i\in I} S_i \to X$ donné par

$$x \longmapsto f_i(x) \quad \text{où } x \in S_i$$

faisant commuter le diagramme, *i.e.* tel que $u \circ q_i = f_i$ pour tout $i \in I$ (où q_i désigne l'inclusion de S_i dans la réunion disjointe). Ce morphisme est bel et bien unique : si $u'\colon \bigsqcup_{i\in I} S_i \to X$ satisfait les mêmes propriétés que u, alors pour tout $x \in \bigsqcup_{i\in I} S_i$ (disons $x \in S_i$)

$$u(x) = f_i(x) = u' \circ q_i(x) = u'(x).$$

Dès lors, la réunion disjointe munie des inclusions est le coproduit dans la catégorie des ensembles.

Exemple 6.19. Dans la catégorie des groupes, le coproduit est le produit libre de groupes.

Exemple 6.20. Dans la catégorie des groupes abéliens, des espaces vectoriels sur un corps fixé, et plus généralement des modules sur un anneau commutatif, le coproduit est donné par la somme directe et les morphismes d'inclusions associés.

Exemple 6.21. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, le coproduit entre A et B est leur produit tensoriel $A \otimes B$; les injections canoniques sont $A \to A \otimes B\colon a \mapsto a \otimes 1$ et $B \to A \otimes B\colon b \mapsto 1 \otimes b$.

Exemple 6.22. Similairement à l'exemple 1.11, tout ensemble partiellement ordonné peut être vu comme une catégorie, en utilisant la relation d'ordre pour construire les morphismes. Le produit correspond alors à l'infimum et le coproduit correspond au supremum, si ceux-ci existent.

7 Objet initial et objet final

Définition 7.1. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie ; un objet I de $\mathbf{C}$ est dit *initial* si pour tout objet $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, il existe un unique morphisme $I \to A$. Un objet F de $\mathbf{C}$ est dit *final* si pour tout objet $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, il existe un unique morphisme $A \to F$.

Proposition 7.2. *S'ils existent, les objets initiaux (resp. finaux) d'une catégorie sont isomorphes à unique isomorphisme près.*

Preuve. Si I et J sont tous deux initiaux dans $\mathbf{C}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_I"] & J \arrow[d, "u'"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_J"] & \\
& I \arrow[r, "u"] & J
\end{tikzcd}$$

et en particulier I et J sont isomorphes. Nous laissons aux lecteurs le soin d'appliquer un raisonnement similaire pour les objets finaux. □

Exemple 7.3. Dans la catégorie des ensembles **Ens**, l'ensemble vide est un objet initial et les singletons sont les objets finaux : il n'existe qu'une seule application d'un ensemble vers un singleton, consistant à envoyer tout élément sur l'élément du singleton.

Exemple 7.4. Dans la catégorie des anneaux **Ann**, l'anneau des entiers $\mathbf{Z}$ est un objet initial et l'anneau nul $\{0\}$ est final.

Exemple 7.5. Dans la catégorie des petites catégories **Cat**, la catégorie zéro $\mathbf{0}$ est initiale et la catégorie $\mathbf{1}$ est finale.

Exemple 7.6. Dans la catégorie des corps, il n'existe pas d'objet initial ou final. Cependant, dans la sous-catégorie des corps où la caractéristique p est fixée, l'objet $\mathbf{Q}$ (si $p = 0$) ou $\mathbf{F}_p$ (si p est premier) est initial.

Exemple 7.7. À partir d'une catégorie $\mathbf{C}$ admettant des produits et d'une famille quelconque d'objets $(A_i)_{i\in I}$ de $\mathbf{C}$, une nouvelle catégorie (dans laquelle leur produit est un objet final) peut être construite : les objets de cette nouvelle catégorie sont les objets X de $\mathbf{C}$ muni d'une famille de morphismes $(f_i\colon X \to A_i)_{i\in I}$ de $\mathbf{C}$; les morphismes $(X, (f_i)_{i\in I}) \to (Y, (f'_i)_{i\in I})$ sont les morphismes $u\colon X \to Y$ de $\mathbf{C}$ satisfaisant $f'_i \circ u = f_i$ pour tout $i \in I$. La propriété universelle du produit fournit que $(\prod_{i\in I} A_i, (p_i)_{i\in I})$ est final dans cette nouvelle catégorie. Réciproquement, tout objet final de cette catégorie est le produit des $(A_i)_{i\in I}$ dans $\mathbf{C}$.

Dualement, une catégorie dans laquelle le coproduit est un objet initial peut être construite sur base d'une catégorie admettant des coproduits.

Remarque 7.8. La notion de produit (resp. coproduit) sur une famille vide d'objets coïncide avec la définition d'objet final (resp. initial) donnée en 7.1.

Remarque 7.9. Dans certaines catégories, la notion d'objet initial et final est confondue ; nous parlerons alors d'*objet nul* (ou *objet zéro*), que nous noterons 0. Cette notion est à nouveau unique à isomorphisme près. C'est le cas par exemple de :

Exemple 7.10. Le groupe trivial (resp. l'espace vectoriel nul, le A-module nul) est l'objet nul dans la catégorie des groupes et des groupes abéliens (resp. des espaces vectoriels sur un corps fixé, des modules sur un anneau commutatif A).

Exemple 7.11. L'ensemble vide est l'objet nul de la catégorie **Rel** des ensembles et des relations binaires.

8 Catégories additives

Définition 8.1. Une catégorie localement petite $\mathbf{C}$ est *préadditive* si tout ensemble $\mathrm{Mor}(A, B)$ est muni d'une structure de groupe abélien telle que les compositions

$$\mathrm{Mor}(A, B) \times \mathrm{Mor}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Mor}(A, C) \colon (f, g) \longmapsto g \circ f$$

sont biadditives, au sens de $f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h)$ et $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$.

Remarque 8.2. En particulier, $\mathrm{Mor}(A, B)$ est non vide quelle que soit la paire d'objets $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$; celui-ci possède au moins le neutre du groupe que nous appellerons l'application nulle et noterons 0.

Remarque 8.3. Un foncteur $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ entre deux catégories préadditives est dit *additif* si l'application $F\colon \mathrm{Mor}(A, B) \to \mathrm{Mor}(F(A), F(B))$ est un morphisme de groupes abéliens pour tous A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$.

Proposition 8.4. *Soit $\mathbf{C}$ une catégorie préadditive, et soient deux objets A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Le produit de A et B existe si et seulement si le coproduit de A et B existe ; auquel cas, $A \times B \simeq A \amalg B$.*

Preuve. Notons $p_A\colon A \times B \to A$ et $p_B\colon A \times B \to B$ les morphismes de projection associés au produit et désignons par $q_A\colon A \to A \times B$ le morphisme correspondant à $(\mathrm{Id}_A, 0)$, *i.e.* l'unique morphisme obtenu par la propriété universelle du produit avec $A \xleftarrow{\mathrm{Id}_A} A \xrightarrow{0} A$, ainsi que par $q_B\colon B \to A \times B$ le morphisme correspondant à $(0, \mathrm{Id}_B)$; le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\mathrm{Id}_A"] & & A \arrow[dl, "q_A"] \\
& A \times B \arrow[ul, "p_A"] \arrow[dl, "p_B"] & \\
B \arrow[rr, "\mathrm{Id}_B"] & & B. \arrow[ul, "q_B"]
\end{tikzcd}$$

De plus, par définition de q_A et q_B, $p_B \circ q_A$ et $p_A \circ q_B$ sont les applications nulles $A \to B$ et $B \to A$. De par la biadditivité et la propriété universelle du produit, $q_A \circ p_A + q_B \circ p_B$ est l'identité sur $A \times B$: la composition de ce morphisme avec p_A donne p_A et avec p_B donne p_B.

Soit désormais X un objet, l'application canonique

$$\upsilon_X \colon \operatorname{Mor}(A \times B, X) \longrightarrow \operatorname{Mor}(A, X) \times \operatorname{Mor}(B, X)$$

est une bijection. En effet, pour toute paire de morphismes $f_A \colon A \to X$ et $f_B \colon B \to X$, le morphisme $f_A \circ p_A + f_B \circ p_B \colon A \times B \to X$ est un antécédent de (f_A, f_B) par υ_X. De plus, pour tous u, $u' \in \operatorname{Mor}(A \times B, X)$ satisfaisant $\upsilon_X(u) = \upsilon_X(u')$,

$$u = u \circ (q_A \circ p_A + q_B \circ p_B) = u' \circ (q_A \circ p_A + q_B \circ p_B) = u'.$$

L'égalité centrale s'obtient par biadditivité et le fait que $\upsilon_X(u) = \upsilon_X(u')$. Selon la proposition 6.17, $(A \times B, (q_A, q_B))$ est le coproduit de A et B. La réciproque est similaire. $\square$

Remarque 8.5. La proposition 8.4 se généralise à un nombre fini d'objets : le produit d'un nombre fini d'objets existe si et seulement si leur coproduit existe ; auquel cas ils sont isomorphes à unique isomorphisme près.

Définition 8.6. Étant donné deux objets A, $B \in \operatorname{Ob}(\mathbf{C})$ d'une catégorie préadditive, la *somme directe* $A \oplus B$ de A et B est le produit $A \times B$ muni des injections canoniques $A \to A \times B$, $B \to A \times B$ et des morphismes de projection $A \times B \to A$ et $A \times B \to B$ si ceux-ci existent.

Définition 8.7. Une *catégorie additive* est une catégorie $\mathbf{C}$ préadditive dans laquelle les produits finis existent, *i.e.* l'objet nul et les sommes directes existent.

Exemple 8.8. Un exemple fondamental de catégorie additive est donné par la catégorie des groupes abéliens $\mathbf{Ab}$. L'addition des morphismes s'effectue ponctuellement. Également, la catégorie des espaces vectoriels sur un corps fixé, et plus généralement, la catégorie $\mathbf{Mod}_A$ des modules sur un anneau commutatif A, sont additives. Ce n'est cependant pas le cas de $\mathbf{Grp}$.

Exemple 8.9. La catégorie des anneaux commutatifs n'est pas additive : $\{0\}$ est final mais n'est pas initial (autre raison : le produit direct fini ne coïncide pas avec le produit tensoriel fini).

Remarque 8.10. Dans une catégorie additive, comme l'objet nul est à la fois initial et final, $\operatorname{Mor}(0, X)$ et $\operatorname{Mor}(X, 0)$ sont des singletons pour n'importe quel objet $X \in \operatorname{Ob}(\mathbf{C})$: ils ne sont composés que de l'application nulle.

Exemple 8.11. Soit K un corps. On définit la catégorie $\mathbf{Mat}(K)$ où les objets sont les naturels, les flèches sont les matrices :

$$\operatorname{Mor}(n, m) = K^{m \times n},$$

et la composition est la multiplication matricielle. Si n ou m sont nuls, il n'y a qu'une unique flèche entre n et m, une matrice sans ligne ou colonne. Cette flèche, notée 0, est absorbante pour la multiplication matricielle. En munissant $\operatorname{Mor}(n, m)$ de la somme matricielle et puisque la somme et le produit se distribuent entre eux, cette catégorie est préadditive. En remarquant que

$$\begin{tikzcd}
 & \ell \arrow[dl, "A"'] \arrow[d, dashed, "U"] \arrow[dr, "B"] & \\
n & n+m \arrow[l, "P_n"'] \arrow[r, "P_m"] & m
\end{tikzcd}$$

où A et B sont des matrices $n \times \ell$ et $n \times \ell$ respectivement, les matrices P_n de taille $n \times (n+m)$ et P_m de taille $m \times (n+m)$ sont définies par

$$P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n \times n} & 0_{n \times m} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_m = \begin{pmatrix} 0_{m \times n} & \mathbb{1}_{m \times m} \end{pmatrix}$$

et la matrice $U = \left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)$ de taille $(n+m) \times \ell$, où nous venons agglutiner les deux matrices A et B, est l'unique matrice faisant commuter le diagramme. Finalement, comme le naturel 0 est un objet nul, la catégorie $\mathbf{Mat}(K)$ est additive.

9 Catégories abéliennes

Définition 9.1. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie préadditive et soit $f\colon A \to B$ un morphisme.

(i) Un *noyau* de f est un morphisme $i\colon K \to A$ tel que $f \circ i = 0$ et pour n'importe quel $i'\colon K' \to A$ satisfaisant $f \circ i' = 0$, il existe un unique morphisme $u\colon K' \to K$ tel que $i' = i \circ u$.

(ii) Un *conoyau* de f est un morphisme $p\colon B \to C$ tel que $p \circ f = 0$ et pour n'importe quel $p'\colon B \to C'$ satisfaisant $p' \circ f = 0$, il existe un unique morphisme $u\colon C \to C'$ tel que $p' = u \circ p$.

Remarque 9.2. Il s'ensuit que les noyaux et les conoyaux sont solution à un problème universel et donc déterminés de façon unique à unique isomorphisme près lorsqu'ils existent. Similairement à 7.7, on peut définir le noyau (resp. conoyau) comme un objet final (resp. initial). Nous noterons le noyau de f par $\mathrm{Ker}(f) \to A$ et le conoyau de f par $B \to \mathrm{Coker}(f)$ lorsque ceci a un sens.

Proposition 9.3. *De façon équivalente, le noyau de $f\colon A \to B$ est un morphisme $K \to A$ tel que pour tout objet $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, la suite suivante est exacte :*

$$0 \to \mathrm{Mor}(X, K) \to \mathrm{Mor}(X, A) \to \mathrm{Mor}(X, B).$$

Dualement, le conoyau de f est un morphisme $B \to C$ tel que pour tout objet $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, la suite suivante est exacte :

$$0 \to \mathrm{Mor}(C, X) \to \mathrm{Mor}(B, X) \to \mathrm{Mor}(A, X).$$

Preuve. Si $\mathrm{Ker}(f) \to A$ est le noyau de f au sens de la définition 9.1, alors la première (resp. seconde) exactitude découle de la partie unicité (resp. existence) de la propriété universelle du noyau.

Réciproquement, si $i\colon K \to A$ est un noyau au sens de la proposition 9.3, alors $f \circ i = 0$ en particularisant à $X = K$ et de par la seconde exactitude. De plus, pour tout morphisme $i'\colon K' \to A$ satisfaisant $f \circ i' = 0$, il existe un morphisme $u\colon K' \to K$ tel que $i' = i \circ u$ en particularisant à $X = K'$ et via la seconde exactitude ; ce morphisme est unique via la première exactitude. La deuxième assertion se prouve similairement. $\square$

Exemple 9.4. Dans la catégorie des groupes abéliens, ou plus généralement dans la catégorie des modules sur un anneau commutatif A, le noyau d'un morphisme $f\colon M \to N$ est le morphisme d'inclusion $K \to M$ où K est donné par la définition algébrique du noyau ; le conoyau de f est le morphisme de projection $N \to C$ où C est donné par la définition algébrique du conoyau.

Définition 9.5. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie préadditive et soit $f\colon A \to B$ un morphisme.

(i) Si le conoyau de f existe, l'*image* de f est le noyau du morphisme $B \to \mathrm{Coker}(f)$; auquel cas il est noté $\mathrm{Im}(f) \to B$.

(ii) Si le noyau de f existe, la *coimage* de f est le conoyau du morphisme $\mathrm{Ker}(f) \to A$; auquel cas il est noté $A \to \mathrm{Coim}(f)$.

Exemple 9.6. Dans la catégorie des groupes abéliens, ou plus généralement dans la catégorie des modules sur un anneau commutatif A, l'image d'un morphisme $f\colon M \to N$ est le morphisme d'inclusion $I \to N$ où I est donné par la définition algébrique de l'image ; la coimage de f est le morphisme de projection $M \to C$ où C est donné par la définition algébrique de la coimage.

Définition 9.7. Une *catégorie abélienne* est une catégorie additive dans laquelle les noyaux et conoyaux existent et si $f\colon A \to B$ est un morphisme dont le noyau (resp. conoyau) est 0, alors f est le noyau (resp. conoyau) de son conoyau (resp. noyau).

Remarque 9.8. Les axiomes d'une catégorie abélienne sont auto-duaux ; la catégorie opposée d'une catégorie abélienne est abélienne.

Remarque 9.9. Une catégorie abélienne est une catégorie demandant suffisamment d'axiomes afin que le lemme du serpent tienne.

Remarque 9.10. Dans une catégorie abélienne, le groupe des morphismes est usuellement désigné par Hom, et pour tous objets A, B de cette catégorie, nous notons

$$\mathrm{Mor}(A, B) = \mathrm{Hom}(A, B).$$

Remarque 9.11. L'exactitude a un sens dans les catégories abéliennes : la suite $\cdots \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} \cdots$ est *exacte en* A si $\mathrm{Ker}(g) \to A$ est l'image de f et $\mathrm{Im}(f) \to A$ est le noyau de g.

Exemple 9.12. La catégorie des groupes abéliens, des espaces vectoriels sur un corps fixé, et plus généralement la catégorie des modules sur un anneau commutatif A, sont des catégories abéliennes.

Exemple 9.13. Soit K un corps ; considérons les paires (E, L) composées d'un K-espace vectoriel E et d'un endomorphisme K-linéaire L de E. Un homomorphisme $f\colon (E, L_E) \to (F, L_F)$ est un K-homomorphisme $f\colon E \to F$ vérifiant $f \circ L_E = L_F \circ f$. Des vérifications élémentaires montrent que de telles paires forment une catégorie abélienne.

Proposition 9.14. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie abélienne et soient trois objets* A, B, $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$.

(*i*) *La suite* $0 \to A \to B \to C$ *est exacte si et seulement si*

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B) \to \mathrm{Hom}(X, C)$$

est une suite exacte de groupes abéliens pour tout objet $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$.

(*ii*) *La suite* $A \to B \to C \to 0$ *est exacte si et seulement si*

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, X) \to \mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(A, X)$$

est une suite exacte de groupes abéliens pour tout objet $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$.

Preuve. Chacune des parties de la proposition résulte d'une manipulation des définitions précédentes ; nous donnons seulement la preuve de l'implication dans le sens de lecture de (*i*).

Soit X un objet de $\mathbf{C}$. Posons $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$ les morphismes de la première suite. L'exactitude en $\mathrm{Hom}(X, A)$ revient à montrer que l'application $f \circ -$ est injective : soient deux morphismes $h\colon X \to A$ et $h'\colon X \to A$; alors

$$f \circ h = f \circ h' \quad \text{ssi} \quad f \circ (h - h') = 0 \quad \text{ssi} \quad h - h' = 0 \quad \text{ssi} \quad h = h'.$$

La deuxième équivalence résulte de l'exactitude en A de la première suite ainsi que de la propriété universelle du noyau. L'exactitude en $\mathrm{Hom}(X, B)$ demande de vérifier que $\mathrm{Ker}(g \circ -) = \mathrm{Im}(f \circ -)$. Notons tout d'abord que $f\colon A \to B$ est le noyau de g de par l'exactitude en B de la première suite. Ainsi, tout élément de la forme $f \circ h \in \mathrm{Im}(f \circ -)$ vérifie

$$g \circ f \circ h = 0 \circ g = 0.$$

Réciproquement, tout $h \in \mathrm{Ker}(g \circ -)$ vérifie $g \circ h = 0$ et donc se factorise en $h = f \circ u$ pour un unique $u\colon X \to A$ via la propriété universelle du noyau ; achevant ainsi la preuve. □

Définition 9.15. Une catégorie abélienne $\mathbf{C}$ est *semi-simple* si toute suite exacte courte est scindée.

Exemple 9.16. La catégorie des K-espaces vectoriels est semi-simple. Plus généralement, la catégorie des A-modules libres, où A est un anneau commutatif, est semi-simple.

Exemple 9.17. La catégorie des groupes abéliens $\mathbf{Ab}$ est abélienne mais n'est cependant pas semi-simple.

Références

[1] Steve Awodey, *Category Theory*, Oxford Logic Guides, 2010.

[2] Serge Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 2002.

[3] The Stacks Project, *Homological Algebra* (v. 2a96e704), 2022.