Chap II. INITIATION À L'ALGÈBRE CATÉGORIQUE

Martin Debaisieux, Valentin Dusollier

1 Isomorphismes naturels

Exemple 1.1. Soient A et B deux ensembles, on a un isomorphisme $A \times B \simeq B \times A$ où l'on permute les composantes des couples. Intuitivement, cet isomorphisme n'est pas dû à des propriétés ou à une structure propre à A et B : il ne dépend pas de ces objets. Il découle de la construction "produit". La notion suivante permet de définir formellement cette idée.

Définition 1.2. Soient $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ deux catégories et $F, G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ deux foncteurs, une *transformation naturelle* $\theta\colon F \to G$ est une famille de flèches de $\mathbf{D}$

$$(\theta_C\colon F(C) \to G(C))_{C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})}$$

telle que pour toute flèche $f\colon C \to D$ de $\mathbf{C}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f"'] & F(C) \arrow[r, "\theta_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\ D & F(D) \arrow[r, "\theta_D"] & G(D) \end{tikzcd}$$

Remarque 1.3. Le foncteur F se transforme en le foncteur G en respectant la structure interne de $\mathbf{D}$, *i.e.* la composition des morphismes. Cette notion permet donc d'étudier le comportement que deux foncteurs ont sur une catégorie. Formalisons les choses en définissant une nouvelle catégorie :

Définition 1.4. Soient $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ deux catégories, on définit la *catégorie des foncteurs* $\mathbf{Fonc}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ où les objets sont les foncteurs $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ et les flèches sont les transformations naturelles. On définit l'identité d'un objet F par

$$\mathrm{Id}_F = (\mathrm{Id}_{F(C)}\colon F(C) \to F(C))_{C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})}$$

et pour toutes transformations naturelles $F \xrightarrow{\theta} G \xrightarrow{\varphi} H$, on a

$$\varphi \circ \theta = (\varphi_C \circ \theta_C\colon F(C) \to H(C))_{C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})}.$$

Notez que Id_F et $\varphi \circ \theta$ sont des transformations naturelles, prouvez-le.

Remarque 1.5. On appelle *isomorphisme naturel* une transformation naturelle qui est un isomorphisme dans la catégorie des foncteurs.

Lemme 1.6. *Une transformation naturelle $\theta\colon F \to G$ est un isomorphisme naturel si et seulement si toutes les flèches $\theta_C\colon F(C) \to G(C)$ sont des isomorphismes.*

Preuve. Exercice. □

Exemple 1.7. Revenons à notre isomorphisme $A \times B \simeq B \times A$ que nous noterons $\pi_{(A,B)}$. En réalité, les foncteurs

$$\times \colon \mathbf{Ens}^2 \to \mathbf{Ens} \colon \begin{cases} (A,B) & \mapsto A \times B \\ (f,g) & \mapsto f \times g \end{cases}$$

$$\bar{\times} \colon \mathbf{Ens}^2 \to \mathbf{Ens} \colon \begin{cases} (A,B) & \mapsto B \times A \\ (f,g) & \mapsto g \times f \end{cases}$$

sont naturellement isomorphes via $\pi \colon \times \to \bar{\times}$. En effet, toutes les applications $\pi_{(A,B)}$ sont des isomorphismes et le diagramme

$$\begin{tikzcd} (A,B) \arrow[d, "{(f,g)}"'] \\ (A',B') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\pi_{(A,B)}"] \arrow[d, "f \times g"'] & B \times A \arrow[d, "g \times f"] \\ A' \times B' \arrow[r, "\pi_{(A',B')}"] & B' \times A' \end{tikzcd}$$

commute pour toutes applications $f \colon A \to A'$ et $g \colon B \to B'$. Dans cette situation, on dit que l'isomorphisme $\pi_{(A,B)} \colon A \times B \xrightarrow{\sim} B \times A$ est naturel, car il provient de l'isomorphisme naturel π. Notez qu'on peut remplacer la catégorie **Ens** par une catégorie quelconque admettant des produits.

Exemple 1.8. Soit $2 = \{0,1\}$ un ensemble à deux éléments, les deux foncteurs contravariants

$$\mathrm{Mor}(-,2) \colon \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} \colon \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}$$

sont naturellement isomorphes. En effet, posons θ_X l'application

$$\mathrm{Mor}(X,2) \to \mathcal{P}(X) \colon g \mapsto g^{-1}(\{1\}).$$

Remarquez que pour tout $f \colon X \to Y$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(X,2) \arrow[r, "\theta_X"] & \mathcal{P}(X) \\ \mathrm{Mor}(Y,2) \arrow[r, "\theta_Y"] \arrow[u, "{\mathrm{Mor}(f,2)}"] & \mathcal{P}(Y) \arrow[u, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

commute. On a également que θ_X est un isomorphisme, d'inverse χ_X définie par

$$\chi_X \colon \mathcal{P}(X) \to \mathrm{Mor}(X,2) \colon A \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } A \in X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, $\theta\colon \mathrm{Mor}(-,2) \to \mathcal{P}$ est un isomorphisme naturel. On retrouve l'isomorphisme bien connu

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{Ens}}(X,2) \simeq \mathcal{P}(X)$$

qui est naturel.

Exemple 1.9. Soit K un corps, notons $(-)^{**} \colon \mathbf{Mod}_K \to \mathbf{Mod}_K$ le foncteur envoyant les K-espaces vectoriels et les applications K-linéaires sur leur bidual. Soit E un espace vectoriel, on définit l'application linéaire injective

$$\eta_E \colon E \to E^{**} \colon x \mapsto (\mathrm{ev}_x \colon E^* \to K)$$

où $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$ pour $f \colon E \to K$. Ces applications donnent lieu à une transformation naturelle

$$\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathbf{Mod}_K} \to (-)^{**},$$

puisque le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[d, "f"'] \\
F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\eta_E"] \arrow[d, "f"'] & E^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\
F \arrow[r, "\eta_F"] & F^{**}
\end{tikzcd}
$$

commute pour toute application linéaire $f\colon E \to F$. En effet, pour tout $x \in E$ et $g\colon F \to K$, on a

$$
\begin{aligned}
(f^{**} \circ \eta_E)(x)(g) &= f^{**}(\mathrm{ev}_x)(g) \\
&= (\mathrm{ev}_x \circ f^*)(g) \\
&= \mathrm{ev}_x(g \circ f) \\
&= g(f(x)) \\
&= \mathrm{ev}_{f(x)}(g) \\
&= (\eta_F \circ f)(x)(g).
\end{aligned}
$$

De plus, si E est de dimension finie alors $E \simeq E^{**}$ et cet isomorphisme est naturel.

2 Foncteurs pleins, fidèles et essentiellement surjectifs

Définition 2.1. Soient $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ deux catégories localement petites. Un foncteur $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est

— *fidèle* si pour tous A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, l'application

$$F_{A,B}\colon \mathrm{Mor}(A, B) \to \mathrm{Mor}(F(A), F(B))$$

définie par $f \mapsto F(f)$ est injective, et

— *plein* si $F_{A,B}$ est surjective.

Définition 2.2. Soient $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ deux catégories localement petites. Un foncteur $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est *essentiellement surjectif (sur les objets)* si F est surjectif sur les objets à isomorphisme près, *i.e.* pour tout $D \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$, il existe $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ tel que $F(C) \simeq D$.

Remarque 2.3. Le foncteur d'inclusion d'une sous-catégorie est plein si et seulement si la sous-catégorie est pleine.

Exemple 2.4. Le foncteur d'identité $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ est fidèle, plein et essentiellement surjectif.

Exemple 2.5. Les deux foncteurs d'inclusion $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ et $\mathbf{Crps} \to \mathbf{Ann}$ sont fidèles, pleins mais ne sont pas essentiellement surjectifs. La représentation d'un groupe par une catégorie donne lieu au foncteur $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Cat}$ qui est fidèle et plein car les foncteurs entre groupes sont exactement les morphismes de groupes. Or il n'est pas essentiellement surjectif car toutes les catégories ne possèdent pas qu'un unique objet.

Exemple 2.6. Le foncteur d'oubli $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ens}$ est fidèle, mais n'est ni plein ni essentiellement surjectif. Le foncteur extrayant la partie additive d'un anneau $\mathbf{Ann} \to \mathbf{Ab}$ est fidèle, mais pas plein. En effet, le seul morphisme de groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ est le trivial qui n'est pas un morphisme d'anneaux.

Exemple 2.7. Le foncteur $(-)^\times\colon \mathbf{Ann} \to \mathbf{Grp}$ s'intéressant à la partie multiplicative d'un anneau n'est ni fidèle, ni plein. Soit $K[X]$ un anneau de polynômes, les automorphismes de $K[X]$ fixant K sont envoyés, par le foncteur, sur $\mathrm{Id}_{K^\times}$. Par conséquent, l'application

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{Ann}}(K[X], K[X]) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{Grp}}(K^\times, K^\times)$$

n'est pas injective ; le foncteur n'est donc pas fidèle. Notez que $\mathrm{Aut}_k(K[X])$ n'est pas trivial, en effet, les automorphismes fixant K sont exactement les morphismes $P(X) \mapsto P(aX+b)$ où $a \in K^\times$ et $b \in K$. De plus, comme $\mathbf{Z}$ est initial dans $\mathbf{Ann}$, il existe un seul morphisme d'anneaux $\mathbf{Z} \to \mathbf{F}_p$. Or, il existe deux morphismes de groupes $\mathbf{Z}^\times \to \mathbf{F}_p^\times$: le trivial et $-1 \mapsto p-1$.

Exemple 2.8. Le foncteur d'oubli $U\colon \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Ab}$ est fidèle et essentiellement surjectif. En effet, un groupe abélien G muni du morphisme d'anneau $A \to \mathrm{End}_{\mathrm{grp}}(G)\colon a \mapsto \mathrm{Id}_G$ forme un A-module M tel que $U(M) \simeq G$. Il n'est cependant pas plein en général. En effet, les endomorphismes de A vu en tant que A-module sont entièrement déterminés par leur image en 1. Par conséquent, $A \simeq \mathrm{End}_{\mathbf{Mod}_A}(A)$. Ce qui n'est pas le cas, en général, pour les endomorphismes de groupes de $U(A)$. Cependant, si $A = \mathbf{Z}$ alors le foncteur est plein. On a donc un foncteur

$$\mathbf{Mod}_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Ab}$$

fidèle, plein et essentiellement surjectif. On verra que ce genre de foncteur joue un rôle important dans la section suivante.

3 Équivalence de catégories

Définition 3.1. Deux catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont *équivalentes*, noté $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$, s'il existe deux foncteurs

$$F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$$

$$G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$$

tels que $G \circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ dans $\mathbf{Fonc}(\mathbf{C},\mathbf{C})$ et $F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}$ dans $\mathbf{Fonc}(\mathbf{D},\mathbf{D})$.

Remarque 3.2. Dans cette situation, on dit que F est un pseudo-inverse de G et réciproquement. En effet, dans cette définition, on n'exige pas que F soit l'inverse de G, *i.e.* $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$, mais une condition plus générale.

Exercice 3.3. Montrez que l'équivalence des catégories est une relation d'équivalence.

Exemple 3.4. $\mathbf{Par} \simeq \mathbf{Ens}_*$. En effet, on a le foncteur $F\colon \mathbf{Par} \to \mathbf{Ens}_*$ qui envoie les objets A sur $(A \cup \{*_A\}, *_A)$ et les flèches $f\colon A \to B$ sur $F(f)\colon (A \cup \{*_A\}, *_A) \to (B \cup \{*_B\}, *_B)$ définie par

$$F(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \operatorname{dom} f \\ *_B & \text{sinon} \end{cases}$$

où $*_A$ et $*_B$ sont de nouveaux éléments. Notez que $F(f)(*_A) = *_B$, par conséquent, $F(f)$ est une flèche de $\mathbf{Ens}_*$. On vérifie facilement que F est un foncteur. On a également le foncteur $G\colon \mathbf{Ens}_* \to \mathbf{Par}$ qui envoie les objets (A,a) sur $A \setminus \{a\}$ et les flèches $f\colon (A,a) \to (B,b)$ sur $G(f) = f{\restriction_{\operatorname{dom} G(f)}}$ où $\operatorname{dom} G(f) = A \setminus \{f^{-1}(b)\} \subseteq A \setminus \{a\}$. G est bien défini et est un foncteur. Notez que $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathbf{Par}}$, étant donné qu'on ajoute un élément artificiellement qu'on retire par la suite, et donc $G \circ F$ vérifie une condition plus forte que ce qui est exigé dans la définition d'équivalence. Cependant, $F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathbf{Ens}_*}$ sans égalité. En effet, les isomorphismes

$$\varphi_A\colon (A,a) \xrightarrow{\sim} ((A \setminus \{a\}) \cup \{*_A\}, *_A)\colon x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \neq a \\ *_A & \text{sinon} \end{cases}$$

forment un isomorphisme naturel $\varphi\colon \mathrm{Id}_{\mathbf{Ens}_*} \xrightarrow{\sim} F \circ G$, montrez-le. Ils réalisent dès lors l'équivalence annoncée $\mathbf{Par} \simeq \mathbf{Ens}_*$.

Nous présentons maintenant une autre caractérisation utile de l'équivalence de deux catégories.

Théorème 3.5. *Deux catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ localement petites sont équivalentes si et seulement s'il existe un foncteur $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ fidèle, plein et essentiellement surjectif.*

Preuve. Nous le prouverons dans le cas de petites catégories. Soient $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ et $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ les deux foncteurs réalisant l'équivalence et $\theta\colon \mathrm{Id}_C \to (G \circ F) =: GF$ et $\varphi\colon \mathrm{Id}_D \to (F \circ G) =: FG$ les transformations naturelles associées. Si $F(f) = F(g)$, alors $GF(f) = GF(g)$ et donc $f = g$, car le contraire serait absurde étant donné que ce carré

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta_C"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & GF(C) \arrow[d, "GF(f)"'] \\ C' \arrow[r, "\theta_{C'}"] & GF(C') \end{tikzcd}$$

commute pour f et g. Par conséquent, F est fidèle. Similairement, G est également fidèle. Soit $h\colon F(C) \to F(C')$, on a la situation

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta_C"] \arrow[d, "f"'] & GF(C) \arrow[d, shift right, "G(h)"'] \arrow[d, shift left, "GF(f)"] \\ C' \arrow[r, "\theta_{C'}"] & GF(C') \end{tikzcd}$$

où $f = \theta_{C'}^{-1} \circ G(h) \circ \theta_C$. Le carré avec $G(h)$ commute car f a été soigneusement choisie et celui avec $GF(f)$ commute par naturalité. Il s'ensuit que F est plein. En effet, comme ces deux carrés commutent, $GF(f) = G(h)$ et puisque que G est fidèle, $F(f) = h$. Finalement, pour tout D objet de $\mathbf{D}$, on a $D \simeq F(G(D))$ par l'application φ_D, où $G(D) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Le foncteur F est donc essentiellement surjectif.

Soit $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un foncteur fidèle, plein et essentiellement surjectif. Puisque F est essentiellement surjectif, pour tout $D \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ il existe $G(D) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ tel que $D \simeq F(G(D))$. Notons φ_D cet isomorphisme. Soit $h\colon D \to D'$, on a

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\varphi_D"] \arrow[d, "h"'] & FG(C) \arrow[d, "\varphi_{C'} \circ h \circ \varphi_D^{-1}"] \\ D' \arrow[r, "\varphi_{D'}"] & FG(C') \end{tikzcd}$$

Puisque F est fidèle et plein, il existe une unique flèche $G(h)\colon G(D) \to G(D')$ telle que $F(G(h)) = \varphi_{C'} \circ h \circ \varphi_D^{-1}$. On a construit un foncteur $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ avec un isomorphisme naturel $\varphi\colon \mathrm{Id}_{\mathbf{D}} \xrightarrow{\sim} FG$ (Montrez que G est bien un foncteur et φ un isomorphisme naturel). De plus, pour tout $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, on a l'isomorphisme $\varphi_{F(C)}\colon F(C) \to F(EF(C))$. Puisque F est plein, il existe

$$\theta_C\colon C \to EF(C)$$

telle que $F(\theta_C) = \varphi_{F(C)}$. Notez que comme $\varphi_{F(C)}$ est un isomorphisme et que F est foncteur fidèle et plein, θ_C l'est aussi. Ainsi, on a construit un isomorphisme naturel $\theta\colon \mathrm{Id}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\sim} EF$. Finalement, on a deux foncteurs

$$F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$$

$$G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$$

tel que $G \circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ et $F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}$. Par conséquent, $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$. $\square$

Exemple 3.6. Nous avons un foncteur $\mathbf{Mod}_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Ab}$ fidèle, plein et essentiellement surjectif, par conséquent,

$$\mathbf{Mod}_{\mathbf{Z}} \simeq \mathbf{Ab}.$$

Ce résultat n'est en effet pas étonnant.

Il n'est pas étonnant de constater que plusieurs propriétés et notions sont invariantes par équivalence, intéressons nous à une partie d'entre elles.

Proposition 3.7. *Soit $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un foncteur réalisant une équivalence de catégorie. Un objet C de $\mathbf{C}$ est initial (resp. final) si et seulement si $F(C)$ l'est.*

Preuve. Soit $C' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, comme F est fidèle et plein, l'application

$$\mathrm{Mor}(C, C') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mor}(F(C), F(C'))$$

est bijective. La nécessite s'obtient facilement. Pour la suffisance, remarquez que F est essentiellement surjectif et que $\mathrm{Mor}(A, B) \simeq \mathrm{Mor}(A, B')$ pour $B \simeq B'$. On obtient le reste du résultat par dualité. □

Proposition 3.8. *Soit $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un foncteur réalisant une équivalence de catégorie. Une flèche $f\colon C \to C'$ est un isomorphisme si et seulement si $F(f)\colon F(C) \to F(C')$ l'est.*

Preuve. Exercice. □

Proposition 3.9. *Soit $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un foncteur réalisant une équivalence de catégorie. Soient C, C' deux objets de $\mathbf{C}$; le produit de C et C' existe si et seulement si celui de $F(C)$ et $F(C')$ existe.*

Preuve. Exercice. □

Corollaire 3.10. *Si $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$, alors $\mathbf{C}$ possède des produits si et seulement si $\mathbf{D}$ en possède.*

Proposition 3.11. *Si $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$, alors $\mathbf{C}$ est une catégorie additive si et seulement si $\mathbf{D}$ l'est.*

Preuve. Supposons que $\mathbf{C}$ soit additive. On munit $\mathrm{Mor}(F(A), F(B))$ d'une structure de groupe telle que le foncteur $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ soit additif. De ce fait, F stabilise $+_{\mathbf{C}}$ et $\circ_{\mathbf{C}}$ et donc les compositions de $\mathbf{D}$ sont biadditives puisque $\mathbf{C}$ est préadditif. Il s'ensuit que $\mathbf{D}$ est préadditif. On conclut, via le corollaire 3.10, que $\mathbf{D}$ est additif. □

Exemple 3.12. Tout morphisme de monoïdes, de groupes ou d'ensembles partiellement ordonnés donne lieu à un foncteur entre ces structures vues en tant que catégorie. Par conséquent, de tout isomorphisme entre ces structures émerge une équivalence de catégorie. En particulier, la correspondance de Galois établit l'équivalence entre la catégorie des sous-corps de L/K et la catégorie opposée des sous-groupes de $\mathrm{Gal}(L/K)$ pour L/K extension finie galoisienne.

Exemple 3.13. Soit K un corps ; fixons une base pour chaque K-espace vectoriel de dimension finie, *i.e.* les objets de $\mathbf{Mod}_K^{\mathrm{fin}}$. Les catégories additives $\mathbf{Mat}(K)$ et $\mathbf{Mod}_K^{\mathrm{fin}}$ sont équivalentes via le foncteur F envoyant le naturel n sur K^n et la matrice $A \in \mathrm{Mor}(n, m)$ sur $\mu_A\colon K^n \to K^m$ définie par $\mu_A(x) = Ax$ où $x \in K^n$ est écrit dans la base que nous avons fixée. Notez que K^n peut être remplacé par n'importe quel K-espace vectoriel de dimension n. Tout cours d'algèbre linaire montre que ce foncteur est fidèle, plein et essentiellement surjectif ; par conséquent,

$$\mathbf{Mat}(K) \simeq \mathbf{Mod}_K^{\mathrm{fin}}.$$

Ce résultat est cohérent avec la proposition 3.11 puisque ces deux catégories sont additives.

Références

[1] Steve Awodey, *Category Theory*, Oxford Logic Guides, 2010.

[2] Serge Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 2002.

[3] The Stacks Project, *Homological Algebra* (v. 2a96e704), 2022.