
INITIATION AUX ANNEAUX DE PÉRIODES p -ADIQUES

Martin Debaisieux

Résumé. — Jean-Marc Fontaine a révolutionné l'étude des représentations p -adiques en proposant un outil de classification basé sur de nouveaux anneaux. Ces notes traitent de l'admissibilité des représentations, de la construction des anneaux de périodes \mathbf{B}_{dR} et \mathbf{B}_{cris} , et s'achèvent sur l'équivalence de catégories associée aux représentations cristallines.

Table des matières

1. Introduction.....	2
2. Représentations semi-linéaires.....	2
3. Préliminaires sur les anneaux de Fontaine.....	6
4. L'anneau des périodes p -adiques.....	12
5. Représentations de de Rham.....	15
6. L'anneau des périodes cristallines.....	21
7. Représentations cristallines.....	23
Références.....	30

Mots clefs. — Périodes p -adiques - représentations p -adiques - de de Rham - cristallines - théorie de Hodge p -adique.

Contact : martin.debaisieux@umons.ac.be

1. Introduction

La compréhension du groupe de Galois absolu de \mathbf{Q} joue un rôle central en théorie des nombres. L'aborder directement est toutefois une tâche ardue. Pour en extraire de l'information, on étudie en tout premier p le groupe de Galois absolu de \mathbf{Q}_p . Ceux-ci, qui apparaissent comme sous-groupes de décomposition en p , l'engendrent topologiquement. C'est pour cette raison que l'on s'intéresse aux représentations p -adiques.

Jean-Marc Fontaine a apporté une contribution majeure à l'étude des représentations p -adiques en proposant un outil de classification. L'idée repose sur la construction d'anneaux munis d'une action continue de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et de structures additionnelles. Le but étant de construire des anneaux suffisamment riches pour que les classes obtenues le soient aussi.

2. Représentations semi-linéaires

Étant donné un anneau de périodes tel que \mathbf{C}_p , \mathbf{B}_{dR} , ou bien \mathbf{B}_{cris} , nous nous intéresserons aux B -modules de la forme $B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ muni de l'action diagonale. Dans l'expression précédente, V est une représentation galoisienne \mathbf{Q}_p -linéaire. Puisque le groupe de Galois agit aussi sur B , l'action est tordue et l'on parle alors de représentations semi-linéaires.

2.1. Définitions

On commence par poser le contexte général de ces notes. Soient G un groupe et B un anneau sur lequel G agit compatiblement avec sa structure⁽¹⁾.

Définition 2.1. — Une représentation B -semi-linéaire de G est un B -module de type fini W muni d'une action additive de G et telle que $g.(bw) = gb.gw$ pour tous $g \in G$, $b \in B$ et $w \in W$.

Ceci généralise la notion de représentation linéaire où l'action de G sur B est triviale. On parle de représentations p -adiques quand $B = \mathbf{Q}_p$ et galoisiennes quand $G = G_K$ pour un corps p -adique K .

Exemple 2.2. — Par hypothèse, B est une représentation B -semi-linéaire de G . Si l'on fait agir G sur chaque composante de B^n avec $n \geq 0$, alors B^n est à son tour une représentation B -semi-linéaire de G . On la nomme représentation triviale sur B de rang n .

⁽¹⁾On pensera à G le groupe de Galois absolu d'un corps p -adique et B un anneau de périodes. Ceux-ci sont naturellement munis d'une structure topologique additionnelle. Nous ne faisons cependant aucune hypothèse topologique sur G et B car les résultats abordés dans cette section sont purement algébriques.

Conformément à la théorie des modèles, un morphisme entre représentations B -semi-linéaires de G est une application B -linéaire et G -équivariante, ce qui signifie qu'il commute à l'action de G . On forme ainsi la catégorie $\mathbf{Rep}_B(G)$ qui est abélienne, stable par somme directe, produit tensoriel et passage au dual. La représentation triviale de rang 1 est son objet unité.

Définition 2.3. — Une représentation B -semi-linéaire de G est libre si le B -module sous-jacent est libre.

On donne maintenant une machine qui d'une représentation linéaire fabrique une représentation B -semi-linéaire libre. Ce procédé est fondamental pour la suite.

2.2. Extensions des scalaires

Soit A un sous-anneau de B stable sous l'action de G . La notion de représentation A -semi-linéaire fait alors sens et l'on a un foncteur canonique

$$\begin{aligned} \mathbf{Rep}_A(G) &\longrightarrow \mathbf{Rep}_B(G) \\ V &\longmapsto B \otimes_A V. \end{aligned}$$

Exemple 2.4. — Supposons que F est un sous-corps de B^G . Alors $\mathbf{Rep}_F(G)$ est la catégorie des représentations F -linéaires de G . Étant donné un tel objet V , le B -module $B \otimes_F V$ obtenu par extension des scalaires est une représentation B -semi-linéaire libre.

2.3. Détection de la trivialité

Définition 2.5. — Une représentation B -semi-linéaire libre de G est triviale si elle est isomorphe à l'une des représentations triviales B^n .

Là où il est en général facile de détecter la trivialité d'une représentation linéaire, il l'est moins pour une semi-linéaire. Une représentation linéaire est triviale si et seulement si G agit trivialement sur chaque vecteur de l'espace vectoriel sous-jacent. Une représentation semi-linéaire est triviale si et seulement si elle admet une base fixe par G .

Remarque 2.6. — Il arrive qu'une représentation non triviale le devienne après extension des scalaires. Cela fait partie de la stratégie de Fontaine que l'on abordera au paragraphe suivant.

Posons $E = B^G$. Étant donné une représentation B -semi-linéaire W de G , on a un morphisme canonique

$$\alpha(W): B \otimes_E W^G \longrightarrow W$$

qui joue un rôle crucial pour la détection. Si W est triviale, alors $\alpha(W)$ est un isomorphisme. On verra que la réciproque est vraie sous hypothèse de liberté.

2.4. Admissibilité

Fixons F un sous-corps de E . Fontaine a eu pour idée d'utiliser B dans le but de fabriquer un foncteur intéressant de $\mathbf{Rep}_F(G)$ dans la catégorie des espaces vectoriels sur E , éventuellement enrichi d'une structure additionnelle provenant de l'anneau B .

Définition 2.7. — Une représentation F -linéaire V de G est B -admissible si la représentation B -semi-linéaire $B \otimes_F V$ de G est triviale.

On note $\mathbf{Rep}_F^B(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_F(G)$ des représentations B -admissibles. Cette catégorie reste stable par somme directe, produit tensoriel et passage au dual. Un premier exemple évident de telles représentations sont les triviales sur F .

Remarque 2.8. — L'admissibilité est croissante au sens que si $B_1 \subseteq B_2$ alors toute représentation B_1 -admissible est B_2 -admissible.

On donne ores un critère de B -admissibilité. On dit que B est (F, G) -régulier s'il satisfait les trois points suivants :

(H1) B est intègre.

(H2) $B^G = (\text{Frac } B)^G$ avec l'action naturelle sur $\text{Frac } B$.

(H3) Pour tout $b \in B$ non nul, si la droite Fb est G -stable alors $b \in B^\times$.

Exemple 2.9. — Si B est un corps, il satisfait automatiquement (H1) – (H3). En particulier \mathbf{C}_p et \mathbf{B}_{dR} sont (\mathbf{Q}_p, G_K) -régulier pour tout corps p -adique K . On verra que \mathbf{B}_{cris} l'est aussi.

Exemple 2.10. — L'anneau \mathbf{B}_{dR}^+ n'est pas (\mathbf{Q}_p, G_K) -régulier pour tout corps p -adique K . La raison est que la \mathbf{Q}_p -droite engendrée par t est G_K -stable mais t n'est pas inversible. C'est pourquoi l'on passe au corps des fractions.

L'hypothèse (H3) requiert que E soit un corps. Pour tout $b \in E$ non nul, la droite Fb est clairement G -stable. Dès lors b est inversible dans B mais son inverse doit être fixe par G .

Proposition 2.11. — Nous supposons que B vérifie (H1) et (H2). Soit V une représentation F -linéaire de G et posons $W = B \otimes_F V$. Le morphisme $\alpha(W): B \otimes_E W^G \rightarrow W$ est injectif.

Démonstration. — Par (H2) il suffit de prouver le résultat en supposant que B est un corps. Pour vérifier que $\alpha(W)$ est injective, on montre que si la suite $(x_1, \dots, x_n) \subseteq W^G$ est libre sur E alors elle l'est sur B . On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est trivial car W est un B -module libre et B est intègre (H1). Pour $n \geq 2$, on suppose qu'il existe $b_1, \dots, b_n \in B$ non tous nuls tels que $b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0$. Par hypothèse de récurrence, b_n n'est pas

nul et comme B est supposé être un corps on peut considérer $b_n = -1$. Mais puisque $gx_n = x_n$ pour tout $g \in G$, on en déduit que $\{b_1, \dots, b_{n-1}\} \cup \{-1\}$ est contenu dans E et cela contredit la liberté de (x_1, \dots, x_n) sur E . \square

Cela nous mène à l'un des résultats principaux de ces notes : l'admissibilité d'une représentation se détermine par un calcul de dimension.

Théorème 2.12. — *Nous supposons que B est (F, G) -régulier. Soit V une représentation F -linéaire de G et posons $W = B \otimes_F V$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) V est B -admissible.
- (2) $\alpha(W): B \otimes_E W^G \hookrightarrow W$ est un isomorphisme.
- (3) $\dim_E W^G = \dim_F V$.

Démonstration. — Seulement (3) implique (2) n'est pas immédiat. On montre que $b = \det(\alpha(W))$ est inversible dans B . Soit (v_1, \dots, v_n) une base de V sur F et soit (w_1, \dots, w_n) une base de W^G sur E . Par une définition du déterminant, on a abusivement

$$\alpha(W)(w_1) \wedge \dots \wedge \alpha(W)(w_n) = b.(v_1 \wedge \dots \wedge v_n).$$

Puisque $\alpha(W)$ est injective, on peut affirmer que b n'est pas nul. Si l'on applique $g \in G$ à l'égalité précédente, on trouve que $b = gb.\eta$ où η est défini par

$$gv_1 \wedge \dots \wedge gv_n = \eta.(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$$

et appartient à F car (v_1, \dots, v_n) engendre V sur F qui est G -stable. De ce fait $g^{-1}b = bg^{-1}(\eta) \in Fb$ pour tout $g \in G$ et donc $b \in B^\times$ par (H3). \square

On obtient un foncteur \mathbf{D}_B de la catégorie $\mathbf{Rep}_F(G)$ dans \mathbf{Mod}_E en posant $\mathbf{D}_B(V) = (B \otimes_F V)^G$ pour toute représentation F -linéaire V de G . On note plus simplement $\alpha_B(V) = \alpha(B \otimes_F V)$ le morphisme de comparaison.

Corollaire 2.13. — *Nous supposons que B est (F, G) -régulier. La catégorie $\mathbf{Rep}_F^B(G)$ est stable par sous-objets et quotients.*

Démonstration. — Soit $0 \rightarrow V_1 \rightarrow V \rightarrow V_2 \rightarrow 0$ une suite exacte de $\mathbf{Rep}_F(G)$ où l'on suppose que V est B -admissible. Elle reste exacte après $B \otimes_F -$ car B est un F -espace vectoriel. La suite

$$0 \rightarrow \mathbf{D}_B(V_1) \rightarrow \mathbf{D}_B(V) \rightarrow \mathbf{D}_B(V_2) \dashrightarrow 0$$

est exacte en $\mathbf{D}_B(V_1)$ car il s'agit de la restriction d'un monomorphisme et est exacte en $\mathbf{D}_B(V)$ par injectivité de la précédente. Notons d, d_1, d_2 la dimension respective de V, V_1, V_2 sur F . Comme V est B -admissible, on a $d = \dim_E \mathbf{D}_B(V)$. On a aussi que $\dim_E \mathbf{D}_B(V_i) \leq d_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. De par l'exactitude de la première suite, on sait que $d = d_1 + d_2$. On en déduit alors de l'exactitude partielle que V_1 et V_2 sont B -admissibles. \square

Corollaire 2.14. — Nous supposons que B est (F, G) -régulier. La restriction du foncteur \mathbf{D}_B à $\mathbf{Rep}_F^B(G)$ est exacte, fidèle et commute à la somme directe, au produit tensoriel et au passage au dual.

Démonstration. — L'exactitude découle de la démonstration précédente. Pour la fidélité, soient f et $g \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ deux morphismes entre représentations B -admissibles V_1, V_2 tels que $\mathbf{D}_B(f) = \mathbf{D}_B(g)$. Comme l'admissibilité est stable par sous-objets et que

$$0 = \mathrm{Im}(\mathbf{D}_B(f - g)) = \mathbf{D}_B(\mathrm{Im}(f - g)),$$

on a $f = g$. On montre la commutation avec le produit tensoriel ; le reste est similaire. Soit σ le morphisme faisant commuter le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}_B(V_1) \otimes_E \mathbf{D}_B(V_2) & \overset{\sigma}{\dashrightarrow} & \mathbf{D}_B(V_1 \otimes_F V_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (B \otimes_F V_1) \otimes_B (B \otimes_F V_2) & \xrightarrow{\sim} & B \otimes_F (V_1 \otimes_F V_2). \end{array}$$

Par construction σ est injectif. On montre que c'est un isomorphisme. On sait que $\dim_E \mathbf{D}_B(V_i) = \dim_F(V_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$ et donc

$$\begin{aligned} \dim_E(\mathbf{D}_B(V_1) \otimes_E \mathbf{D}_B(V_2)) &= \dim_F V_1 \times \dim_F V_2 \\ &\geq \dim_E \mathbf{D}_B(V_1 \otimes_F V_2). \end{aligned}$$

Par conséquent σ est un monomorphisme entre espaces vectoriels sur E de même dimension finie, c'est alors un isomorphisme. \square

Exemple 2.15. — L'objet unité de $\mathbf{Rep}_F(G)$ est envoyé sous \mathbf{D}_B sur celui de \mathbf{Mod}_E . On a plus généralement que $\mathbf{D}_B(F^n) \simeq E^n$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque 2.16. — Cette insensibilité au passage au dual est exploitée afin de définir le foncteur contravariant \mathbf{D}_B^* donné par $\mathbf{D}_B^*(V) = \mathrm{Hom}_{F[G]}(V^*, B)$ pour toute représentation F -linéaire V de G .

3. Préliminaires sur les anneaux de Fontaine

Pour lors, nous avons dédié le contenu de ces notes à divers formalismes dont le climax est la notion d'admissibilité. Suivant les travaux de Fontaine, nous construisons pas à pas deux anneaux de périodes \mathbf{B}_{dR} et $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$. Ces anneaux sont enrichis d'une topologie naturelle, d'une filtration et même d'un Frobenius pour le second.

Fixons une clôture algébrique de \mathbf{Q}_p dans laquelle nous prenons K un corps p -adique. Notons $\mathbf{C} = \mathbf{C}_p$ le complété p -adique de celle-ci, $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ l'anneau de ses entiers, $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}}$ son idéal maximal et v sa valuation normalisée en p .

3.1. L'anneau \mathcal{R}

La construction des anneaux de Fontaine débute en caractéristique p . Soit σ le Frobenius $\sigma(x) = x^p$ agissant sur le quotient $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$. On pose \mathcal{R} la limite projective du système suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathcal{R} & & & \\ & \swarrow & & \downarrow & \searrow & & \\ \mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p\mathcal{O}_{\mathbf{C}} & \xleftarrow{\sigma} & \mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p\mathcal{O}_{\mathbf{C}} & \xleftarrow{\sigma} & \dots & \xleftarrow{\sigma} & \mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p\mathcal{O}_{\mathbf{C}} & \xleftarrow{\sigma} & \dots \end{array}$$

Concrètement, un élément de \mathcal{R} est une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ satisfaisant la condition de transition $x_{n+1}^p = x_n$ pour tout $n \geq 0$.

3.1.1. Parfait. — Cet anneau résulte d'un processus général de perfection. Le Frobenius σ étend son action à \mathcal{R} et définit un automorphisme, d'inverse donné par le décalage $(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Cela fait de \mathcal{R} un anneau parfait de caractéristique p . Il est par ailleurs pourvu d'une action naturelle de G_K continue pour la topologie de la limite où chaque objet est muni de la topologie quotient. Avant de découvrir certaines de ses bonnes propriétés, on en donne une description alternative.

Lemme 3.1. — Soit $(x_n)_n$ un élément de \mathcal{R} . Pour tout $n \geq 0$, on choisit $\hat{x}_n \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ un relèvement de x_n modulo p . Pour tout $n \geq 0$, la suite $(\hat{x}_{n+m}^{p^m})_m$ converge vers un $x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ indépendant des relèvements choisis.

Démonstration. — Soit $n \geq 0$. Pour tout $m \geq 0$, on a $\hat{x}_{n+m+1}^p \equiv \hat{x}_{n+m} \pmod{p}$ et de ce fait

$$\hat{x}_{n+m+1}^{p^{m+1}} \equiv \hat{x}_{n+m}^{p^m} \pmod{p^{n+1}}.$$

La suite de l'énoncé est donc de Cauchy dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$, qui ne manque pas d'être complet. Elle converge alors comme annoncé. Cette limite est indépendante des relèvements choisis : si $(\hat{x}_n)_n$ et $(\tilde{x}_n)_n$ sont deux relèvements de $(x_n)_n$, alors $\hat{x}_{n+m} \equiv \tilde{x}_{n+m} \pmod{p}$ pour tout $m \geq 0$ et on conclut par le même argument. \square

Proposition 3.2. — En adoptant les notations du lemme précédent, l'application multiplicative

$$\begin{array}{l} \mathcal{R} \longrightarrow \{(y_n)_n \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}^{\mathbf{N}} \mid y_{n+1}^p = y_n \text{ pour tout } n \geq 0\} \\ (x_n)_n \longmapsto (x^{(n)})_n \end{array}$$

est bijective, d'inverse donnée par $(y_n)_n \mapsto (y_n \pmod{p})_n$.

Démonstration. — Il est aisé de vérifier que ces flèches sont bien définies. On montre qu'elles sont inverses l'une de l'autre. Soit $n \geq 0$, pour tout $m \geq 0$ on sait que $\hat{x}_{n+m}^{p^m} \equiv \hat{x}_n \pmod{p}$. Il suit par continuité de v que $x_n = x^{(n)} \pmod{p}$. La réciproque est évidente. \square

On transporte la structure sur \mathcal{R} à cet ensemble afin de faire de l'application précédente un isomorphisme d'anneaux. On passera d'une expression à l'autre sans le mentionner. On pose

$$(x + y)^{(n)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(x^{(n+m)} + y^{(n+m)} \right)^{p^m}$$

pour tout $n \geq 0$. On note qu'un élément x de \mathcal{R} est inversible pour la multiplication si et seulement si $x^{(0)}$ l'est dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$.

3.1.2. Valuation. — On peut munir \mathcal{R} d'une valuation héritée de celle sur \mathbf{C} pour laquelle il est complet, en posant

$$v_{\mathcal{R}}(x) = v(x^{(0)}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} p^m v(x^{(m)})$$

pour tout $x \in \mathcal{R}$. La complétude n'est en rien surprenante puisque la topologie qu'elle induit coïncide avec celle de la limite.

Proposition 3.3. — *La paire $(\mathcal{R}, v_{\mathcal{R}})$ est un anneau de valuation complet et dont le corps résiduel est $\overline{\mathbf{F}}_p$.*

Démonstration. — Seul l'aspect non archimédien de $v_{\mathcal{R}}$ demande une justification. Soient x et y deux éléments que l'on suppose non nuls. Pour un $n \geq 0$ suffisamment grand on peut majorer de sorte que $\max\{v(x^{(n)}), v(y^{(n)})\} < 1$. Par définition de l'addition dans la description alternative :

$$v((x + y)^{(n)}) \geq \min\{v(x^{(n)}), v(y^{(n)}), 1\} \geq \min\{v(x^{(n)}), v(y^{(n)})\}.$$

On en déduit ce que l'on voulait montrer. Concernant l'assertion sur le corps résiduel, il suffit de constater que $\mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p : x \mapsto x^{(0)} \bmod \mathfrak{m}_{\mathbf{C}}$ est surjective, de noyau donné par les éléments de valuation strictement positive. La topologie de cette valuation correspond à la limite puisque pour tout $n \geq 0$, un élément x vérifie $v_{\mathbf{E}}(x) \geq 0$ si et seulement si $x_n = 0$, et donc

$$\{x \in \mathcal{R} \mid v_{\mathcal{R}}(x) \geq p^n\} = \text{Ker}(\pi_n : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p\mathcal{O}_{\mathbf{C}}).$$

Par conséquent $(\mathcal{R}, v_{\mathcal{R}})$ est complet. \square

3.1.3. Cyclotomie. — Le \mathbf{Z}_p -module $\mathbf{Z}_p(1)$, libre de rang 1 sur lequel G_K agit via le caractère cyclotomique, se retrouve dans \mathcal{R} . Celui-ci s'insère dans la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{Z}_p(1) \longrightarrow \mathcal{R}^{\times} \xrightarrow{-(0)} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}^{\times} \longrightarrow 1.$$

Un exemple important d'élément est $\varepsilon \in \mathcal{R}$ où $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$. Alors $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n -ième de 1 pour tout $n \geq 0$. Un tel élément est un générateur de $\mathbf{Z}_p(1)$ en tant que \mathbf{Z}_p -module. Il est unique à une puissance dans \mathbf{Z}_p^{\times} près. De plus $v_{\mathcal{R}}(\varepsilon - 1) = \lim_{m \rightarrow +\infty} p^m v(\varepsilon^{(m)} - 1) = p/(p - 1)$.

3.1.4. Algébriquement clos. — L'anneau \mathcal{R} est en particulier intègre. Sa valuation s'étend naturellement à son corps des fractions et fait de \mathcal{R} l'anneau de ses entiers, qui est intégralement clos. Il s'avère que son corps des fractions est algébriquement clos.

Lemme 3.4. — *Le corps $\text{Frac}(\mathcal{R})$ est algébriquement clos si et seulement si tout polynôme monique non constant à coefficients dans \mathcal{R} admet une racine dans \mathcal{R} .*

Démonstration. — Supposons que $\text{Frac}(\mathcal{R})$ est algébriquement clos. Soit $P(X)$ un polynôme monique non constant à coefficients dans \mathcal{R} . Il existe alors un $x \in \text{Frac}(\mathcal{R})$ racine de P . Comme \mathcal{R} est intégralement clos, $x \in \mathcal{R}$. Supposons à présent que \mathcal{R} est algébriquement clos. Soit $P(X) \in \text{Frac}(\mathcal{R})[X]$ monique de degré $d \geq 1$. Pour un $y \in \mathcal{R}$ bien choisi, le polynôme $y^d P(X/y)$ est monique à coefficients dans \mathcal{R} . Il existe par conséquent une racine x dans \mathcal{R} à ce polynôme et $x/y \in \text{Frac}(\mathcal{R})$ est racine de P . \square

Lemme 3.5. — *Tout idéal I de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ strictement contenu dans $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}}$ et comprenant p induit un isomorphisme $\mathcal{R} \rightarrow \varprojlim_{x \rightarrow x^p} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}/I$.*

Démonstration. — Son noyau est trivial puisque quel que soit l'élément $x \in I$, $v(x^{p^n}) \geq 1$ pour un n suffisamment grand. \square

Ce résultat est d'une grande utilité en pratique car il octroie de la flexibilité dans la construction de \mathcal{R} . Il permet par exemple de plonger canoniquement le module de Tate d'un groupe formel de Lubin-Tate sur \mathcal{O}_K dans \mathcal{R} (comme en 7.7). On l'exploite dans la démonstration suivante.

Proposition 3.6. — *Le corps $\text{Frac}(\mathcal{R})$ est algébriquement clos.*

Démonstration. — On se ramène à \mathcal{R} via le Lemme 3.4. Soit $P(X) \in \mathcal{R}[X]$ un polynôme monique non constant. On note $P^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}[X]$ la n -ième composante de P pour tout $n \geq 0$, alors

$$\left(P^{(n+1)}(X)\right)^p \equiv P^{(n)}(X^p) \pmod{p}.$$

Soit $n \geq 0$ et soit $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ une racine de $P^{(n)}$. Soit $y \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ tel que $y^p = x$. De par la relation précédente, il existe $\beta \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ une racine de $P^{(n+1)}$ telle que $v(y - \beta) \geq 1/(dp)$ avec d le degré de P . On en déduit que $v(\alpha - \beta^p) \geq 1/d$.

Le paragraphe précédent montre que l'on peut construire par récurrence une suite d'éléments $(\alpha_n)_n$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ telle que $P^{(n)}(\alpha_n) = 0$ et $\alpha_{n+1}^p \equiv \alpha_n \pmod{p^{1/d}}$. Pour tout $n \geq 0$, soit $x_n \in \mathcal{R}$ de n -ième composante α_n dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$. On montre grâce au Lemme 3.5 que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy et converge vers un $x \in \mathcal{R}$ qui est racine de P . \square

3.2. L'anneau \mathbf{A}_{inf}

La deuxième étape consiste à revenir en caractéristique nulle. Pour cela, on applique le foncteur de Witt à \mathcal{R} et l'on obtient l'anneau \mathbf{A}_{inf} . Il joue un rôle majeur dans la construction des anneaux de Fontaine⁽²⁾. Il est en outre intègre, p -adiquement complet et muni d'un Frobenius $\varphi = W(\sigma)$.

3.2.1. Topologies. — Deux topologies font sens sur \mathbf{A}_{inf} . La première est la topologie produit où \mathcal{R} à sa topologie naturelle. Pour celle-ci, il acquiert une action continue de G_K et son Frobenius est G_K -équivariant. On peut montrer qu'il est complet pour cette topologie. L'autre est la topologie p -adique. Elle est plus fine que la première, seulement G_K n'agit pas continûment.

3.2.2. Algèbre. — Comme $\overline{\mathbf{F}}_p$ s'injecte dans chaque objet formant la limite projective dont \mathcal{R} est issu, ce dernier est une algèbre sur $\overline{\mathbf{F}}_p$. On obtient alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W(\overline{\mathbf{F}}_p) & \hookrightarrow & \mathbf{A}_{\text{inf}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathbf{F}}_p & \hookrightarrow & \mathcal{R}. \end{array}$$

On rappelle au lecteur que $W(\overline{\mathbf{F}}_p)$ est l'anneau des entiers du complété p -adique de \mathbf{Q}_p^{nr} l'extension maximale non ramifiée de \mathbf{Q}_p .

3.2.3. Morphisme θ . — On relève l'épimorphisme $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{C}} : x \mapsto x^{(0)}$ à \mathbf{A}_{inf} en posant

$$\begin{aligned} \theta : \mathbf{A}_{\text{inf}} &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{C}} \\ (x_n)_n &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(n)} \end{aligned}$$

qui est bien définie car \mathbf{C} est p -adiquement complet. Comme elle encapsule la surjection précédente, elle l'est aussi.

Proposition 3.7. — *L'application θ est un épimorphisme de $W(\overline{\mathbf{F}}_p)$ -algèbres.*

Démonstration. — Par construction, θ est surjective et transporte l'injection de $W(\overline{\mathbf{F}}_p)$ dans \mathbf{A}_{inf} sur celle dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$. Si nous montrons que θ est additive, alors la multiplicativité s'en suivra. En effet, il ne restera qu'à le montrer sur les représentants de Teichmüller :

$$\theta_n([a][b]) = \theta_n([ab]) = (ab)^{(0)} = a^{(0)}b^{(0)} = \theta_n([a])\theta_n([b]).$$

Montrons dès lors l'additivité.

⁽²⁾Colmez l'identifie à l'Anneau Unique de Sauron, l'illustre Maia : "Un Anneau pour les gouverner tous" et pour cause, tous les anneaux de Fontaine le contiennent.

Posons $\theta_n: W_n(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p^n\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ l'application induite par θ pour tout $n \geq 1$. Nous désignons par f_n la projection canonique sur la n -ième composante de \mathcal{R} et ω_n le n -ième polynôme de Witt pour tout $n \geq 0$. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} W_n(\mathcal{R}) & \xrightarrow{\theta_n} & \mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p^n\mathcal{O}_{\mathbf{C}} \\ \downarrow W_n(f_n) & \nearrow & \uparrow \omega_{n-1} \\ W_n(\mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p\mathcal{O}_{\mathbf{C}}) & \xrightarrow{\pi_n} & W_n(\mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p^n\mathcal{O}_{\mathbf{C}}). \end{array}$$

Comme f_n est additive, $W_n(f_n)$ l'est aussi. Puisque π_n et ω_{n-1} sont additives, la factorisation l'est aussi. On a donc montré que θ_n est additive. \square

La flèche θ est continue pour les deux topologies considérées sur \mathbf{A}_{inf} . Nous montrons que son noyau est principal. Soit $\varpi \in \mathcal{R}$ tel que $\varpi^{(0)} = -p$, l'élément $\xi = [\varpi] + p = (\varpi, 1, \dots) \in \mathbf{A}_{\text{inf}}$ appartient au noyau de θ . Il s'avère que s'en est même un générateur.

Lemme 3.8. — *Le noyau de θ est engendré par l'élément ξ . La suite de ses puissances $(\text{Ker}(\theta)^n)_n$ est séparée.*

Démonstration. — Il suffit de montrer l'inclusion $\text{Ker}(\theta) \subseteq (\xi, p)$ afin d'établir la première assertion. En effet, si cela est vrai, tout $x \in \text{Ker}(\theta)$ s'écrit sous la forme $x = \xi y_0 + p x_1$. Mais alors $x_1 \in \text{Ker}(\theta)$. Par induction on construit deux suites $(y_n)_n$ et $(x_n)_n$ telles que

$$x_0 = x \quad \text{et} \quad x_n = \xi y_n + p x_{n+1}$$

pour tout $n \geq 0$. Ainsi $x = \xi \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n$ et cette série converge dans \mathbf{A}_{inf} . On montre maintenant l'inclusion. Si x appartient au noyau de θ , alors

$$\theta(x) = x_0^{(0)} + p \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} x_n^{(n)} = 0.$$

Donc $v(x_0) \geq v(\varpi)$ et ainsi $x_0 \varpi^{-1} \in \mathcal{R}$. Dès lors $x - [x_0 \varpi^{-1}] \xi \in p \mathbf{A}_{\text{inf}}$ et cela démontre la première assertion.

Montrons la séparation. Soit $x \in \bigcap_n \text{Ker}(\theta)^n$, alors $v(x_0) \geq n$ quel que soit le $n \geq 0$ et donc $x = p y$ pour un certain $y \in \mathbf{A}_{\text{inf}}$. Alors on a $y \in \text{Ker}(\theta)$. En recommençant avec $x/\xi \in \text{Ker}(\theta)$, on montre que $y/\xi \in \text{Ker}(\theta)$ et ainsi de suite jusqu'à obtenir que $y \in \bigcap_n \text{Ker}(\theta)^n$. Par induction on trouve que x appartient à toutes les puissances de l'idéal engendré par p et donc x est nul. \square

Remarque 3.9. — On peut montrer qu'un élément $a = (a_n)_n \in \text{Ker}(\theta)$ est un générateur du noyau de θ si et seulement si $v_{\mathcal{R}}(a_0) = 1$, ou encore si et seulement si $v_{\mathcal{R}}(a_1) = 0$.

4. L'anneau des périodes p -adiques

On souhaite disposer d'un anneau topologique muni d'une action continue de G_K et d'une filtration intéressante au regard de la cohomologie de de Rham. On veut aussi pouvoir admettre les \mathbf{Z} -puissances du caractère cyclotomique. Cela nous amène à construire \mathbf{B}_{dR} .

4.1. L'anneau $\mathbf{B}_{\text{inf}}^+$

L'anneau \mathbf{A}_{inf} n'est pour maintes raisons pas un bon candidat. Il nous sert néanmoins de base pour atteindre notre objectif. Soit $\mathbf{B}_{\text{inf}}^+ = \mathbf{A}_{\text{inf}}[1/p]$ l'anneau où l'on rend inversible p . On peut se servir du morphisme θ afin de construire un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_{\text{inf}}^+ & \overset{\theta}{\dashrightarrow} & \mathbf{C} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{A}_{\text{inf}} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{O}_{\mathbf{C}} \end{array}$$

d'algèbres sur le complété p -adique de \mathbf{Q}_p^{nr} en posant $\theta(1/p) = 1/p$. On le note à nouveau θ . L'action de G_K s'étend naturellement à ce nouvel anneau et θ commute à celle-ci. Son noyau reste principal et engendré par ξ . La filtration donnée par ses puissances joue un rôle important.

Lemme 4.1. — *La suite des puissances $(\text{Ker}(\theta)^n)_n$ du noyau de $\theta: \mathbf{B}_{\text{inf}}^+ \rightarrow \mathbf{C}$ est séparée.*

Démonstration. — Pour chaque élément, on se ramène au Lemme 3.8 en multipliant par une puissance suffisamment grande de p . \square

4.2. L'anneau \mathbf{B}_{dR}^+

Comme nous l'avons déjà mentionné, on veut le caractère cyclotomique dans notre anneau. Un moyen simple d'y parvenir est en définissant un logarithme. Seulement, $\mathbf{B}_{\text{inf}}^+$ n'est pas complet $\text{Ker}(\theta)$ -adiquement. Alors on le complète et on obtient

$$\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ = \varprojlim_{n \geq 1} \mathbf{B}_{\text{inf}}^+ / \text{Ker}(\theta)^n.$$

Cet anneau jouit de nombreuses bonnes propriétés que l'on cite maintenant et que l'on détaillera juste après. C'est un anneau de valuation discrète complet dont \mathbf{C} est le corps résiduel. Il est muni d'une action continue de G_K et d'une \mathbf{N} -filtration compatible donnée par les puissances de son idéal maximal. Cette filtration est exhaustive et séparée. Le Lemme 4.1 identifie canoniquement $\mathbf{B}_{\text{inf}}^+$ à un sous-anneau de \mathbf{B}_{dR}^+ . Et finalement, il comprend une uniformisante sur laquelle G_K agit via le caractère cyclotomique.

4.2.1. Anneau de valuation discrète. — Puisque le noyau de θ est un idéal maximal engendré par un élément non nilpotent, l'anneau \mathbf{B}_{dR}^+ est muni d'une valuation discrète pour laquelle il est complet par définition et dont ξ est une uniformisante. Son corps résiduel est \mathbf{C} et apparaît par extension de θ suivant le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ & \overset{\theta}{\dashrightarrow} & \mathbf{C} \\ \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ \mathbf{B}_{\text{inf}}^+ / \text{Ker}(\theta) & \longleftarrow & \mathbf{B}_{\text{inf}}^+ \end{array}$$

Dit autrement, son idéal maximal est le noyau du nouveau θ . On peut vérifier que cette extension de θ est cohérente avec le précédent. On associe à \mathbf{B}_{dR}^+ une \mathbf{N} -filtration en posant

$$\text{Fil}^n \mathbf{B}_{\text{dR}} = \xi^n \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$$

pour tout $n \geq 0$. Celle-ci est décroissante, exhaustive et séparée. La topologie associée est trop forte ; elle induit sur \mathbf{C} la topologie discrète. Pour cette raison, on utilise seulement cette topologie à des fins de construction.

Proposition 4.2. — *Il existe un plongement d'anneaux de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ dans \mathbf{B}_{dR}^+ . Il est unique et donc G_K -équivariant.*

Démonstration. — Tout élément de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ est par définition racine d'un polynôme monique à coefficients dans $\mathbf{Q}_p \subseteq \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$. Un tel polynôme est scindé dans \mathbf{C} . Le lemme de Hensel $\text{Ker}(\theta)$ -adique relève de manière unique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ dans \mathbf{B}_{dR}^+ . \square

4.2.2. Action de G_K . — Le groupe de Galois G_K agit continûment sur chaque objet du système projectif dont \mathbf{B}_{dR}^+ est issu et cette action passe à la limite si chaque objet est muni de la topologie quotient. On parle alors de la topologie naturelle. Elle induit sur \mathbf{C} la topologie p -adique. Pour celle-ci, θ est continu et G_K -équivariant. La filtration est par conséquent G_K -stable.

Remarque 4.3. — Le relèvement précédent n'est pas continu pour la topologie naturelle. Toutefois il existe une section de $\theta: \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow \mathbf{C}$ dans la catégorie des anneaux commutatifs. Elle n'est pas unique et elle ne peut ni être continue ni G_K -équivariante.

4.2.3. Cyclotomie. — Compléter $\text{Ker}(\theta)$ -adiquement permet de définir un logarithme. On pose

$$t = \log[\varepsilon] = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{([\varepsilon] - 1)^n}{n} \in \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$$

où $\varepsilon \in \mathcal{R}$ est tel que défini à la Sous-section 3.1.3. L'expression précédente fait sens car $[\varepsilon] - 1$ appartient au premier cran $\text{Fil}^1 \mathbf{B}_{\text{dR}}$ de la filtration.

Proposition 4.4. — *La période t est une uniformisante de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.*

Démonstration. — On commence par montrer que t appartient au premier cran de la filtration. Chaque terme de la série définissant t est dans $\mathrm{Fil}^1 \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et donc t aussi car $\mathrm{Fil}^1 \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est fermé. On montre maintenant que la valuation de t vaut exactement 1 en montrant que $t \notin \mathrm{Fil}^2 \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. Pour cela, il suffit de montrer que $[\varepsilon] - 1 \notin \xi^2 \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$. Si c'était le cas

$$v_{\mathcal{R}}(\varepsilon - 1) = \frac{p}{p-1} \geq 2$$

et cela serait absurde pour p impair. Pour $p = 2$, on se donne un $x \in \mathcal{R}$ tel que $x^2 = \varepsilon$. Alors $[x] + 1 = \xi y$ pour un certain $y \in \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ et on montre facilement que $y \notin \mathrm{Ker}(\theta)$. Ainsi $[\varepsilon] - 1 = [x]^2 - 1 \equiv -2\xi y \pmod{\xi^2 \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}}$ et cette quantité n'est pas nulle. \square

Remarque 4.5. — Si $\varepsilon' \in \mathcal{R}$ est un autre générateur de $\mathbf{Z}_p(1)$, alors $\varepsilon' = \varepsilon^\lambda$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{Z}_p^\times$. De la continuité de $[-]: \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ on a $[\varepsilon^\lambda] = [\varepsilon]^\lambda$. On peut montrer que

$$\log[\varepsilon'] = \lambda \log[\varepsilon] = \lambda t$$

mais cela n'est évident dû au changement de topologie. Quoi qu'il en est, la droite $\mathbf{Z}_p t$ est indépendante du choix de ε . Choisir une base de $\mathbf{Z}_p t$ revient à choisir un ε , qui lui-même revient à choisir une base de $\mathbf{Z}_p(1)$.

L'élément t est celui que nous recherchions. D'une part il donne la filtration et d'autre part G_K agit sur lui via le caractère cyclotomique. Pour $g \in G_K$ on a en effet

$$g.t = \log(g.[\varepsilon]) = \log[\varepsilon^{\chi(g)}] = \chi(g)t.$$

Derrière ces égalités se cachent des délicatesses topologiques dont nous omettons les détails. On a donc une copie canonique de $\mathbf{Z}_p(1)$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

4.3. Le corps \mathbf{B}_{dR}

L'anneau que nous venons de construire a d'excellentes propriétés mais n'est hélas pas (\mathbf{Q}_p, G_K) -régulier. La période t engendre sur \mathbf{Q}_p une droite G_K -stable bien qu'elle ne soit pas inversible. On passe alors au corps des fractions, la plus petite structure où t est inversible.

Définition 4.6. — L'anneau des périodes p -adiques est $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{Frac}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$.

Puisqu'il s'agit d'un corps, le problème de régularité disparaît. Il hérite d'une action continue de G_K et d'une \mathbf{Z} -filtration en posant

$$\mathrm{Fil}^n \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = t^n \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \xi^n \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Cette filtration est décroissante, exhaustive, séparée et stable sous l'action du groupe de Galois absolu de K .

Nous allons déterminer les points fixes de \mathbf{B}_{dR} sous l'action de G_K . Pour ce faire, nous avons besoin d'un important résultat de la théorie de Sen que nous ne prouvons pas ici.

Théorème 4.7. — *Soit V une représentation p -adique et continue de G_K de dimension 1. Alors $V = \mathbf{Q}_p(\eta)$ pour un $\eta: G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$. On a*

$$\mathbf{C}(\eta)^{G_K} = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta(I_K) \text{ n'est pas fini} \\ K & \text{si } \eta(I_K) \text{ est fini.} \end{cases}$$

Démonstration. — On se réfère à [FO22, Corollary 4.45]. \square

Exemple 4.8. — Dans le cas où $\eta = \chi^n$ est une puissance entière du caractère cyclotomique, le Théorème 4.7 nous apprend que $\mathbf{C}(n)^{G_K} = 0$ si et seulement si $n \neq 0$.

La filtration sur \mathbf{B}_{dR} ne résulte pas d'un choix innocent. Elle induit comme anneau gradué l'anneau de Hodge-Tate \mathbf{B}_{HT} . Formellement

$$\mathbf{B}_{\text{HT}} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathbf{C}(n)$$

et est (\mathbf{Q}_p, G_K) -régulier. C'est le plus simple anneau que l'on puisse construire afin de rendre admissible les twists de Tate. Le Théorème 4.7 nous apprend que l'ensemble de ses points fixes est K . Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on note $\text{gr}^n \mathbf{B}_{\text{dR}} \simeq \mathbf{C}(n)$ le quotient de $\text{Fil}^n \mathbf{B}_{\text{dR}}$ par $\text{Fil}^{n+1} \mathbf{B}_{\text{dR}}$.

Proposition 4.9. — *L'ensemble des points fixes de \mathbf{B}_{dR} sous l'action de G_K est K .*

Démonstration. — Nous savons déjà que $K \subseteq \mathbf{B}_{\text{dR}}$ et cela établi une première inclusion. Réciproquement, soit $b \in \mathbf{B}_{\text{dR}}$ un élément non nul fixe sous l'action de G_K . Alors il existe un $n \in \mathbf{Z}$ tel que $b \in \text{Fil}^n \mathbf{B}_{\text{dR}} - \text{Fil}^{n+1} \mathbf{B}_{\text{dR}}$. On note b_0 l'image de b dans $\text{gr}^n \mathbf{B}_{\text{dR}}$. Alors $b_0 \neq 0$ et b_0 est fixe sous l'action de G_K . Par le Théorème 4.7, on en déduit que $n = 0$ et donc que $b_0 \in K$. Il ne reste plus qu'à remarquer que $b - b_0 \in \mathbf{B}_{\text{dR}}$ est fixe par G_K et que $b - b_0 \in \text{Fil}^m \mathbf{B}_{\text{dR}}$ pour un $m \geq n + 1 > 0$. Ainsi $b = b_0 \in K$. \square

5. Représentations de de Rham

On spécialise le foncteur \mathbf{D}_B à l'anneau \mathbf{B}_{dR} , noté \mathbf{D}_{dR} . Le Corollaire 2.14 est un premier pas vers une équivalence de catégories. Seulement \mathbf{Mod}_K n'est pas suffisamment riche afin d'encapsuler la \mathbf{B}_{dR} -admissibilité. Nous débutons cette section en présentant une nouvelle catégorie dont le but est de resserrer l'étau autour de l'image essentielle de \mathbf{D}_{dR} .

5.1. Espaces vectoriels filtrés

Dans la littérature, un espace vectoriel filtré désigne un objet filtré dans la catégorie des espaces vectoriels. Puisque l'on souhaite décrire l'image essentielle du foncteur \mathbf{D}_{dR} , on se restreint aux espaces de dimension finie. Sans surprise on demande à la filtration de partager des propriétés analogues à la filtration de de Rham.

Définition 5.1. — Un K -espace vectoriel filtré est un K -espace vectoriel de dimension finie muni d'une \mathbf{Z} -filtration décroissante, exhaustive et séparée par des sous-espaces vectoriels.

Étant donné un espace vectoriel filtré D , on note $\text{Fil}^n D$ le n -ième cran de sa filtration. Puisqu'il est de dimension finie, sa filtration est exhaustive si et seulement s'il existe un $n \in \mathbf{Z}$ tel que $\text{Fil}^n D = D$, et est séparée si et seulement s'il existe un $m \in \mathbf{Z}$ tel que $\text{Fil}^m D = 0$. Par décroissance $n \leq m$, avec égalité si et seulement si $D = 0$. On parle alors de filtration finie car seuls les indices compris entre n et m fournissent de l'information.

Exemple 5.2. — Les filtrations sur K sont toutes de la forme $\text{Fil}^n K = K$ pour tout $n \leq s$ et $\text{Fil}^n K = 0$ pour tout $n > s$ où $s \in \mathbf{Z}$ est un entier fixé. On dit que le saut de la filtration est en s .

Un morphisme $f: D_1 \rightarrow D_2$ de K -espaces vectoriels filtrés est une application K -linéaire vérifiant

$$f(\text{Fil}^n D_1) \subseteq \text{Fil}^n D_2$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$. On obtient une catégorie que l'on note \mathbf{Fil}_K . Elle est stable par sous-objets pour la filtration induite et par quotients pour le quotient des filtrations. Elle admet l'objet nul 0 muni de son unique filtration et les sommes directes avec

$$\text{Fil}^n(D_1 \oplus D_2) = \text{Fil}^n D_1 \oplus \text{Fil}^n D_2$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Il s'agit donc d'une catégorie additive. Elle admet les produits tensoriels avec

$$\text{Fil}^n(D_1 \otimes D_2) = \sum_{n=n_1+n_2} (\text{Fil}^{n_1} D_1 \otimes_K \text{Fil}^{n_2} D_2)$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$. De ce fait, K avec le saut en 0 est l'objet unitaire. La filtration sur le dual d'un K -espace vectoriel filtré D est donnée par

$$\text{Fil}^n D^* = (\text{Fil}^{-n+1} D)^\perp$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$. La perpendicularité est selon la forme bilinéaire canonique, ce qui signifie que dans le n -ième cran de la filtration on collecte les formes qui s'annulent sur $\text{Fil}^{-n+1} D$.

Exemple 5.3. — L'identité sur K est un isomorphisme de \mathbf{Mod}_K . Mettons en s_1 le saut d'une filtration sur son domaine et en s_2 pour son codomaine. Il s'ensuit que l'identité est un morphisme de \mathbf{Fil}_K si et seulement si $s_1 \leq s_2$, et est un isomorphisme si et seulement si $s_1 = s_2$.

La catégorie des espaces vectoriels filtrés sur K admet des noyaux et images pour les filtrations induites. Hélas, la coimage d'un morphisme et son image ne sont en général pas isomorphes dans \mathbf{Fil}_K : elle n'est pas abélienne. L'exemple précédent en témoigne. On donne un nom aux morphismes vérifiant le premier théorème d'isomorphisme.

Définition 5.4. — Un morphisme $f: D_1 \rightarrow D_2$ de \mathbf{Fil}_K est strict s'il satisfait $f(\mathrm{Fil}^n D_1) = \mathrm{Fil}^n D_2 \cap \mathrm{Im}(f)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Grâce à cette distinction, on peut donner un sens à l'exactitude dans cette catégorie. On dit qu'une suite de \mathbf{Fil}_K est exacte si elle est exacte dans \mathbf{Mod}_K et que les morphismes sont stricts. Les morphismes que l'on rencontrera par la suite seront stricts par construction, ce qui permettra de conserver l'exactitude du Corollaire 2.14.

5.2. Admissibilité

L'anneau des périodes p -adiques \mathbf{B}_{dR} a été construit de sorte à satisfaire les hypothèses de la deuxième section. On dispose alors d'un critère d'admissibilité en comparant les dimensions.

Définition 5.5. — Une représentation p -adique de G_K est de de Rham si elle est \mathbf{B}_{dR} -admissible.

L'une de nos préoccupations lors de la construction de \mathbf{B}_{dR} était de contenir le caractère cyclotomique. Cela se fait via l'élément $t = \log[\varepsilon]$ où $\varepsilon \in \mathcal{R}$ est un générateur de $\mathbf{Z}_p(1)$.

Exemple 5.6. — Soit $n \in \mathbf{Z}$, on montre en détails que $\mathbf{Q}_p(n)$ est de de Rham. La dimension sur \mathbf{Q}_p de $\mathbf{Q}_p(n)$ vaut 1 ; ainsi elle est de de Rham si et seulement si $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathbf{Q}_p(n))$ est de dimension 1 sur K . Soit v un générateur de $\mathbf{Q}_p(n)$. Pour tout $g \in G_K$, on a

$$\begin{aligned} g.(t^{-n} \otimes v) &= \chi(g)^{-n} t^{-n} \otimes v \chi(g)^n \\ &= \chi(g)^{-n} \chi(g)^n (t^{-n} \otimes v) \\ &= t^{-n} \otimes v. \end{aligned}$$

On vient de montrer que $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathbf{Q}_p(n))$ est de dimension 1 sur K et donc que la représentation $\mathbf{Q}_p(n)$ est de de Rham. On remarque par la même occasion que la période t^{-n} est génératrice de la K -droite $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathbf{Q}_p(n))$.

L'exemple précédent est fondamental en dimension 1, c'est-à-dire parmi les caractères. On s'intéresse désormais à un exemple en dimension 2 généralisant la situation des courbes de Tate.

Exemple 5.7. — Soit $w \in K^\times$ et notons $\omega \in \mathcal{R}$ un élément tel que $\omega^{(0)} = w$. Pour tout $g \in G_K$, il existe un unique $c(g) \in \mathbf{Z}_p$ tel que $g.\omega = \varepsilon^{c(g)}\omega$. On pose V_w la représentation p -adique de G_K de dimension 2 dont l'action est donnée par

$$G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) : g \longmapsto \begin{pmatrix} \chi(g) & c(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Celle-ci est bien définie car c est un 1-cocycle du caractère cyclotomique χ . On montre que V_w est de de Rham quel que soit le $c = c_\omega$. Les paires $(x, y) \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^2$ vérifiant

$$(1) \quad g.x = \chi(g)x \quad \text{et} \quad g.y = c(g)x + y$$

pour tout $g \in G_K$ s'identifient canoniquement aux éléments de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^*(V_w)$. Ainsi trouver des périodes revient à trouver des paires vérifiant (1). Clairement $(0, 1)$ vérifie (1). Posons

$$u = \log([\omega]) = \log(w) + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{([\omega]/w - 1)^n}{n} \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}.$$

La paire (t, u) est linéairement indépendante de $(0, 1)$ et vérifie (1) car pour tout $g \in G_K$ on a

$$g.u = \log(w) + c(g) \log([\varepsilon]) + \log([\omega]/w)$$

Nous venons de montrer que $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^*(V_w)$ est de dimension 2 sur K et par conséquent que V_w est de de Rham. Noter que l'action sur les paires de \mathbf{B}_{dR} provient de l'action duale.

Remarque 5.8. — Plusieurs situations intéressantes surviennent suivant le choix de $\omega \in \mathcal{R}$. Par exemple, si $\omega = 1$ le cocycle associé est nul et la matrice devient

$$\begin{pmatrix} \chi(g) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $V = \mathbf{Q}_p(1) \oplus \mathbf{Q}_p$ où le deuxième morceau est la représentation triviale. Si $\omega = \varepsilon$, alors la situation est tout à fait différente. Le cocycle associé est $\chi - 1$ et la matrice devient

$$\begin{pmatrix} \chi(g) & \chi(g) - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La première situation exprime une suite exacte scindée, n'étant pas le cas de la deuxième. Malgré cette différence l'issue est la même : les deux représentations associées sont de de Rham.

Comme nous l'avons annoncé, la catégorie \mathbf{Fil}_K précise l'image essentielle du foncteur \mathbf{D}_{dR} . Soit V une représentation p -adique de G_K , on muni $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ d'une filtration en posant

$$\mathrm{Fil}^n \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathrm{Fil}^n \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$. La filtration obtenue hérite des bonnes propriétés de celle de de Rham : elle est décroissante, exhaustive et séparée. Cela donne lieu à un raffinement du Corollaire 2.14.

Théorème 5.9. — *Le foncteur $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}: \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{dR}}(G_K) \rightarrow \mathbf{Fil}_K$ est exact, fidèle et commute à la somme directe, au produit tensoriel et au passage au dual.*

Démonstration. — On renvoie à [FO22, Theorem 6.34] pour une preuve de ce résultat. Noter que nous l'avons déjà prouvé lorsque la catégorie d'arrivée est \mathbf{Mod}_K . Il ne reste qu'à vérifier la préservation des filtrations. \square

Corollaire 5.10. — *Soit V une représentation p -adique de G_K et soit $n \in \mathbf{Z}$. Alors, V est de de Rham si et seulement si $V(n)$ est de de Rham.*

Démonstration. — L'admissibilité est stable par produit tensoriel. Dans le sens de lecture on a que $V(n) = V \otimes_{\mathbf{Q}_p} (n)$ et est donc de de Rham. Réciproquement on a récupère V en détordant $V = V(n) \otimes_{\mathbf{Q}_p} (n)^*$. \square

Rappelons que \mathbf{B}_{HT} est l'anneau gradué associé à \mathbf{B}_{dR} . Cela n'est pas sans incidence sur le foncteur \mathbf{D}_{dR} . On a clairement

$$(2) \quad \mathrm{gr}^n \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \subseteq (\mathbf{C}_p(n) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Proposition 5.11. — *Soit V une représentation p -adique de G_K . Si V est de de Rham, alors V est \mathbf{B}_{HT} -admissible (de Hodge-Tate). Dans ce cas, (2) est une égalité pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et donc $\mathrm{gr} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{HT}}(V)$.*

Démonstration. — Ceci découle directement de (2) et du fait que $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est de même dimension sur K que son espace vectoriel gradué. \square

Corollaire 5.12. — *Soit $\eta: G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ un caractère continu. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) η est de de Rham.
- (2) η est de Hodge-Tate.
- (3) $\eta = \mu \chi^n$ pour un $n \in \mathbf{Z}$ et $\mu: G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ continu tel que $\mu(I_K)$ est fini.

La réciproque de la Proposition 5.11 est fautive en général bien qu'il s'agisse d'une équivalence en dimension 1. Nous venons donc d'obtenir une description explicite des caractères de de Rham.

Démonstration. — Nous venons de prouver que (1) entraîne (2). Montrons que (2) équivaut à (3). On a que η est de Hodge-Tate si et seulement s'il existe un unique $n \in \mathbf{Z}$ tel que

$$(\mathbf{C}_p(-n) \otimes \mathbf{Q}_p(\eta))^{G_K} = \mathbf{C}_p(\eta\chi^{-n})^{G_K} = K$$

ou encore si et seulement s'il existe un unique $n \in \mathbf{Z}$ tel que $\eta\chi^{-n}$ est d'inertie finie par le Théorème 4.7. Finalement (3) implique (1) découle de la Remarque 5.15 et du Corollaire 5.10. \square

Le résultat précédent nous apprend qu'un caractère de de Rham se décompose en le produit d'une puissance du caractère cyclotomique et d'un caractère d'inertie finie. On donne un nom à ce dernier.

Définition 5.13. — Une représentation p -adique V de G_K est non ramifiée si I_K agit trivialement sur V . Elle est potentiellement non ramifiée si elle est non ramifiée sur une extension finie de K .

Nous comparons maintenant cette définition au résultat suivant. Il nous apprend que la notion de de Rham est insensible au passage à une extension finie. Cette insensibilité empêche la distinction entre la non ramification et la potentielle non ramification.

Proposition 5.14. — Soient V une représentation p -adique de G_K et L une extension finie de K . On note $V|_L$ la restriction à l'action de G_L sur V . Alors, V est de de Rham si et seulement si $V|_L$ est de de Rham.

Démonstration. — Quitte à passer à la clôture galoisienne, supposons que L/K est galoisienne. On note $D = (\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes V)^{G_L}$, qui est une représentation L -semi-linéaire de $\text{Gal}(L/K)$. Une telle représentation est nécessairement triviale par Hilbert 90 et donc

$$\dim_L D = \dim_K D^{\text{Gal}(L/K)} = \dim_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V).$$

Par conséquent, V est de de Rham si et seulement si $V|_L$ est de de Rham. \square

Nous avons pour lors la hiérarchie suivante :

$$\begin{array}{ccc} \text{non ramifiée} & \implies & \text{potentielle non ramifiée} \\ & & \Downarrow \\ & & \text{de Rham} \implies \text{Hodge-Tate.} \end{array}$$

Remarque 5.15. — Nous verrons plus tard qu'une représentation non ramifiée est nécessairement de de Rham. Donc si V est potentiellement non ramifiée, alors $V|_L$ est non ramifiée pour L/K finie, mais alors $V|_L$ est de de Rham et on obtient ainsi que V est de de Rham.

6. L'anneau des périodes cristallines

L'anneau \mathbf{B}_{dR} ne dispose pas d'une extension naturelle du Frobenius de \mathbf{A}_{inf} puisqu'il ne préserve pas le noyau de θ . Nous allons construire en réponse à cela un nouvel anneau partageant des propriétés similaires et doté d'une extension naturelle du Frobenius, à savoir \mathbf{B}_{cris} .

6.1. L'anneau $\mathbf{A}_{\text{cris}}^0$

Faisons quelques pas en arrière pour retrouver l'anneau \mathbf{A}_{inf} qui est muni de son Frobenius. Pour pouvoir l'étendre, nous devons travailler plus finement ; à commencé par inverser p seulement quand cela est nécessaire afin de produire des éléments de la forme $x^n/n!$ pour $x \in \text{Ker}(\theta)$. Le noyau de θ étant principal engendré par ξ , il suffit de considérer

$$\mathbf{A}_{\text{cris}}^0 = \mathbf{A}_{\text{inf}} \left[\frac{\xi^n}{n!} ; n \in \mathbf{N} \right] \subseteq \mathbf{B}_{\text{inf}}^+.$$

Il s'agit d'une sous- \mathbf{A}_{inf} -algèbre de $\mathbf{B}_{\text{inf}}^+$ stable sous l'action de G_K et contenue dans $\mathbf{A}_{\text{inf}}[\xi/p]$. Il est dit de l'anneau obtenu qu'il est la PD-enveloppe de \mathbf{A}_{inf} relativement au noyau de θ .

6.2. L'anneau \mathbf{A}_{cris}

Afin de pouvoir appliquer des techniques analytiques, nous complétons l'anneau précédent p -adiquement, que nous notons \mathbf{A}_{cris} . Le diagramme suivant à pour fonction de préciser que le travail est effectué en interne

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A}_{\text{cris}}^0 & \dashrightarrow & \mathbf{A}_{\text{cris}} & \dashrightarrow & \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \\ & \searrow & & \searrow & \nearrow \\ & \mathbf{A}_{\text{inf}}[\xi/p] & \longrightarrow & \mathbf{A}_{\text{inf}}[[\xi/p]] & \end{array}$$

grâce au [FO22, Lemma 7.2]. On peut montrer que G_K agit continûment sur cet anneau pour la topologie p -adique. Nous ne le faisons pas ici car cela utilise une description dont nous avons pas besoin. Explicitement

$$\mathbf{A}_{\text{cris}} = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\xi^n}{n!} \in \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \mid (a_n)_n \in \mathbf{A}_{\text{inf}}^{\mathbf{N}} \text{ converge } p\text{-ad. vers } 0 \right\}$$

et est une sous-algèbre sur \mathbf{A}_{inf} de \mathbf{B}_{dR}^+ . L'écriture précédente est très pratique mais est à manipuler avec précaution car elle n'est pas unique.

Proposition 6.1. — *La période p -adique $t = \log[\varepsilon]$ appartient à \mathbf{A}_{cris} .*

Démonstration. — Puisque $[\varepsilon] - 1$ appartient au noyau de θ , on peut l'écrire sous la forme $[\varepsilon] - 1 = \xi b$ pour un $b \in \mathbf{A}_{\text{inf}}$. Pour tout $n \geq 1$, le n -ième terme du logarithme définissant t est $(-1)^{n+1} (n-1)! b^n \xi^n / n!$ et donc $t \in \mathbf{A}_{\text{cris}}$. \square

6.3. L'anneau \mathbf{B}_{cris}

Notre volonté de manipuler des anneaux réguliers requiert d'inverser t . On peut facilement montrer que t^{p-1} est un multiple de p dans \mathbf{A}_{cris} et donc en l'inversant on récupère l'inverse de p .

Définition 6.2. — L'anneau des périodes cristallines est $\mathbf{B}_{\text{cris}} = \mathbf{A}_{\text{cris}}[1/t]$.

L'anneau \mathbf{B}_{cris} est tout à fait charmant. De par sa construction, il est contenu dans l'anneau des périodes p -adiques ce qui lui vaut une filtration induite (qui ne sera pas compatible avec son Frobenius). Le groupe G_K agit continûment sur celui-ci et l'inversibilité de p en fait une algèbre sur K_0 l'extension maximale non ramifiée de \mathbf{Q}_p contenue dans K .

Théorème 6.3. — L'application canonique $K \otimes_{K_0} \mathbf{B}_{\text{cris}} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}$ est injective et G_K -équivariante.

Nous ne le prouvons pas ici, on renvoie à [FO22, Proposition 7.8]. On averti le lecteur de l'importance de cette flèche. Nous l'utiliserons à maintes reprises, à commencer dès maintenant.

Proposition 6.4. — L'anneau \mathbf{B}_{cris} est (\mathbf{Q}_p, G_K) -régulier. L'ensemble de ses points fixes sous l'action de G_K est K_0 .

Démonstration. — Comme \mathbf{B}_{cris} est contenu dans \mathbf{B}_{dR} , il est intègre. Il s'avère que la flèche du Théorème 6.3 s'étend à son corps des fractions \mathbf{C}_{cris} et l'on a en passant aux points fixes :

$$(K \otimes_{K_0} \mathbf{C}_{\text{cris}}^{G_K}) \hookrightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^{G_K} = K.$$

D'autre part il est évident que K_0 est une partie fixe et donc (H2) suit. Pour (H3) on utilise la théorie de Sen, voir [FO22, Proposition 8.7]. \square

On montre finalement que l'on peut munir \mathbf{B}_{cris} d'une extension naturelle du Frobenius φ de \mathbf{A}_{inf} . Pour ce faire, on commence par l'étendre grossièrement à $\mathbf{B}_{\text{inf}}^+$ en endomorphisme d'anneau en posant $\varphi(1/p) = 1/p$. Puisque

$$\varphi(\xi) = [\varpi]^p + p = \xi^p + pa = p \left(a + (p-1)! \frac{\xi^p}{p} \right)$$

pour un certain a dans \mathbf{A}_{inf} , il préserve le sous-anneau $\mathbf{A}_{\text{cris}}^0$. Cela en fait donc un endomorphisme de ce sous-anneau. On peut montrer qu'il est continu pour la topologie p -adique. On l'étend par continuité à \mathbf{A}_{cris} et l'on a que

$$\varphi(t) = \varphi(\log[\varepsilon]) = \log(\varphi([\varepsilon])) = \log[\varepsilon^p] = pt.$$

On obtient une extension naturelle $\varphi: \mathbf{B}_{\text{cris}} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{cris}}$ continue pour la topologie p -adique, G_K -équivariante, semi-linéaire relativement à l'action du relèvement du Frobenius absolu $\sigma \in \text{Gal}(K_0/\mathbf{Q}_p)$ et injective (voir [Bri21]).

7. Représentations cristallines

Dans le même ordre d'idée qu'à la Section 5, on spécialise le foncteur \mathbf{D}_B à l'anneau \mathbf{B}_{cris} , noté \mathbf{D}_{cris} . On commence par préciser son image essentielle une fois restreint aux représentations admissibles. Pour cet anneau, nous présentons jusqu'à l'obtention de l'équivalence de catégories.

7.1. φ -Modules filtrés

Il nous faut une structure capable d'encapsuler les informations fournies par l'anneau des périodes cristallines. Il nous faut donc des K_0 -espaces vectoriels de dimension finie muni d'un Frobenius. On veut aussi pouvoir tirer l'information de \mathbf{D}_{dR} suivant le Théorème 6.3. On désigne par $\sigma \in \text{Gal}(K_0/\mathbf{Q}_p)$ le relèvement du Frobenius absolu.

Définition 7.1. — Un φ -module filtré D sur K est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie muni d'une application $\varphi: D \rightarrow D$ bijective et σ -semi-linéaire et où $D_K = K \otimes_{K_0} D$ est un K -espace vectoriel filtré.

Un φ -module filtré est dès lors un objet défini sur deux couches : une couche de φ -modules sur K_0 et une couche de filtration sur K . Un morphisme entre deux tels objets est une application qui préserve ces deux couches, c'est-à-dire une application K_0 -linéaire f qui commute à φ et dont son extension K -linéaire $f_K = \text{id}_K \otimes f$ est un morphisme de K -espaces vectoriels filtrés. On forme une catégorie, notée $\mathbf{MF}_K(\varphi)$.

Un sous-objet de cette catégorie est sous-espace vectoriel sur K_0 stable sous l'action de φ et muni de la filtration induite. Les quotients existent et cela par n'importe quel sous-objet. Elle admet 0 pour objet nul muni de $0 \mapsto 0$ avec la filtration nulle. Mais aussi les sommes directes définies usuellement sur K_0 avec leur φ défini composante par composante et

$$(D_1 \oplus D_2)_K = D_{1,K} \oplus D_{2,K}$$

muni de la filtration de la somme directe. Ainsi $\mathbf{MF}_K(\varphi)$ est additive. Similairement, elle admet les produits tensoriels où le φ est le tensorisé et avec

$$(D_1 \otimes_{K_0} D_2)_K = D_{1,K} \otimes_K D_{2,K}$$

muni de la filtration du produit tensoriel. Par conséquent, K_0 muni de σ et de la filtration sur K de saut en 0 est l'objet unitaire. Le dual d'un φ -module filtré D est donné par le dual usuel sur K_0 avec $\varphi^*(\eta) = \sigma \circ \eta \circ \varphi^{-1}$ pour $\eta \in D^*$ et

$$(D^*)_K = (D_K)^*$$

muni de la filtration duale. Systématiquement, l'objet D_K est l'analogue défini dans la catégorie des espaces vectoriels filtrés.

La catégorie $\mathbf{MF}_K(\varphi)$ admet des noyaux et images par φ -équivariance mais souffre du défaut de \mathbf{Fil}_K . Un morphisme f de cette catégorie vérifie le premier théorème d'isomorphisme si et seulement si f_K est strict. Ceci témoigne de la non abélianité de la catégorie que l'on étudie. Comme celle des représentations admissibles l'est, nous savons déjà que $\mathbf{MF}_K(\varphi)$ ne donnera pas l'équivalence de catégories attendues.

Définition 7.2. — Un morphisme f de $\mathbf{MF}_K(\varphi)$ est strict si son extension K -linéaire $f_K = \text{id}_K \otimes f$ est un morphisme strict de \mathbf{Fil}_K .

On peut à nouveau définir une notion partielle d'exactitude en demandant l'exactitude dans $\mathbf{Mod}_{K_0}(\varphi)$ et que les morphismes soient stricts. Ainsi la première condition implique qu'après K -extension linéaire elle reste exacte et la deuxième que chaque cran de la filtration induit une suite exacte.

7.2. Admissibilité

L'anneau des périodes cristallines a lui-aussi été construit afin de satisfaire les hypothèses de la deuxième section. On dispose alors d'un critère d'admissibilité en comparant les dimensions.

Définition 7.3. — Une représentation p -adique de G_K est cristalline si elle est \mathbf{B}_{cris} -admissible.

Être cristallin est l'analogue p -adique de la bonne réduction pour les représentations ℓ -adiques de G_K quand $\ell \neq p$. De telles représentations apparaissent dans diverses situations classiques.

Exemple 7.4. — Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la représentation $\mathbf{Q}_p(n)$ est cristalline car $t \in \mathbf{B}_{\text{cris}}$ n'est pas nul. Noter que pour $n \neq 0$, la représentation $\mathbf{Q}_p(n)$ n'est pas ramifiée. Ainsi, être cristallin offre la souplesse de pouvoir être twisté par une puissance entière du caractère cyclotomique ; contrairement aux représentations non ramifiée.

Exemple 7.5. — Reprenons les notations de l'Exemple 5.7. Nous avons montré que V_w est inconditionnellement de de Rham. Si l'on prend $w \in K_0$ d'inverse entier, alors V_w est cristalline. En effet, on peut écrire

$$u = \log(\omega) = \log(w) + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} b^n (n-1)! \frac{\zeta^n}{n!} \in \mathbf{B}_{\text{cris}}$$

où b est un certain élément de \mathbf{A}_{inf} . Comme w est dans la partie non ramifiée de K , son logarithme aussi et comme son inverse est entier on a $q^{-1} \in \mathbf{A}_{\text{inf}}$. Ainsi $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V_w)$ est un K_0 -espace vectoriel de dimension 2. Nous reviendrons plus tard sur la situation quand w est entier.

Exemple 7.6. — Coleman et Iovita ont montré dans [CI97] qu'une variété abélienne \mathcal{A}/K a bonne réduction si et seulement si son module de Tate $V_p(\mathcal{A})$ est cristallin. La notion de potentielle quelque chose est le fait d'acquérir ce quelque chose sur une extension finie. Dès lors, \mathcal{A} a potentielle bonne réduction si et seulement si $V_p(\mathcal{A})$ est potentiellement cristallin. Voir les articles [Vol05] et [Bos23] pour un problème inverse dans ce sujet.

Exemple 7.7. — Soit \mathcal{F}/\mathbf{Z}_p un groupe formel de dimension 1 et de hauteur 1. Il est bien connu que de tels groupes formels sont de Lubin-Tate, ce qui signifie que la multiplication par p dans \mathcal{F} vérifie $[p](X) \equiv X^p \pmod{p}$. Le groupe de Galois absolu G de \mathbf{Q}_p agit sur $T_p(\mathcal{F})$ via un caractère continu

$$\chi_{\mathcal{F}}: G \longrightarrow \mathbf{Z}_p^{\times}.$$

On montre selon [Spe18] que $\chi_{\mathcal{F}}$ est cristallin. Puisque \mathcal{F} est de hauteur 1, son module de Tate est un \mathbf{Z}_p -module libre de rang 1. On l'identifie canoniquement à un sous- \mathbf{Z}_p -module de \mathcal{R} et de façon G -équivariante via $[p](X) \equiv X^p \pmod{p}$. Soit $v \in \mathcal{R}$ un générateur de $T_p(\mathcal{F})$. Par le [Col02, Lemme 9.3] et [Pha23, Lemma 2.1] pour le cas d'une série formelle, on a un unique relèvement $\hat{v} \in \mathbf{A}_{\text{inf}}$ de v vérifiant

$$(A) \varphi(\hat{v}) = [p](\hat{v}) \quad (B) \forall g \in G, g \cdot \hat{v} = [\chi_{\mathcal{F}}(g)](\hat{v}) \quad (C) \theta(\hat{v}) = 0.$$

Le logarithme $t_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} en \hat{v} a d'excellentes propriétés. Si l'on écrit $\hat{v} = \xi b$ pour un certain $b \in \mathbf{A}_{\text{inf}}$ par (C) et $\log_{\mathcal{F}}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n/n X^n$ avec les $a_n \in \mathbf{Z}_p$ et $a_1 = 1$ on a

$$t_{\mathcal{F}} = \log_{\mathcal{F}}(\hat{v}) = \sum_{n \geq 1} a_n (n-1)! b^n \frac{\xi^n}{n!} \in \mathbf{B}_{\text{cris}}.$$

En étudiant le polygone de Newton des itérés de $[p]$ on montre que $t_{\mathcal{F}}$ est une uniformisante de \mathbf{B}_{dR}^+ . La droite engendrée par $t_{\mathcal{F}}$ sur \mathbf{Q}_p est G -stable par (B) et donc $t_{\mathcal{F}}$ est inversible par régularité. On en conclut que $(t_{\mathcal{F}}^{-1} \otimes v)$ est un élément non trivial de $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V_p(\mathcal{F}))$ et donc que $\chi_{\mathcal{F}}$ est cristallin.

Remarque 7.8. — Prenons le cas de $\mathcal{F} = M$ le groupe formel multiplicatif sur \mathbf{Z}_p donné par $M(X, Y) = X + Y + XY$. On rappelle que

$$[p]_M(X) = (X + 1)^p - 1 = pX + \frac{p(p-1)}{2} X^2 + \dots + pX^{p-1} + X^p.$$

Son module de Tate $T_p(M)$ s'identifie à $\mathbf{Z}_p(1) \subseteq \mathcal{R}$. On prend $v = \varepsilon - 1$, alors $\hat{v} = [\varepsilon] - 1$ et G agit sur \hat{v} via la multiplication par le caractère cyclotomique. On retrouve $t_M = \log_M([\varepsilon] - 1) = \log[\varepsilon] = t$.

Exemple 7.9. — Plus généralement, on peut montrer que tout groupe formel de dimension 1 sur l'anneau des entiers d'un corps p -adique et de hauteur finie admet un module de Tate cristallin.

Nous allons maintenant finaliser la hiérarchie des représentations p -adiques. Si V est une représentation p -adique de G_K , alors $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)_K \subseteq \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ via le plongement canonique du Théorème 6.3. Il s'avère que cette identification est une égalité (isomorphisme canonique) quand V est cristalline.

Proposition 7.10. — *Soit V une représentation p -adique de G_K . Si V est cristalline, alors V est de de Rham et $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)_K = \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ dans \mathbf{Fil}_K .*

Démonstration. — Si V est cristalline, alors $\dim_{\mathbf{Q}_p} V = \dim_K \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)_K$ et celle-ci est bornée par $\dim_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ de par ce que l'on vient de montrer. On en déduit l'assertion. \square

Remarque 7.11. — La réciproque est fautive en général. Prenons $w = -p$ dans l'Exemple 5.7 et donc $\omega = \varpi$. Ici w est entier et l'on peut montrer que $u = \log[\varpi]$ ne converge pas dans \mathbf{B}_{cris} , voir [FO22, Proposition 7.14]. Dès lors V_w est de de Rham mais pas cristalline. Noter que $\mathbf{B}_{\text{st}} = \mathbf{B}_{\text{cris}}[u]$ est un autre anneau de Fontaine intervenant dans la classification des représentations mais dont on ne parle pas ici.

Proposition 7.12. — *Soit V une représentation p -adique de G_K . Alors, V est non ramifiée si et seulement si V est potentiellement non ramifiée et est cristalline.*

Démonstration. — Voir [Car19, Proposition 4.3.1.(i)] pour le sens de lecture et [Car19, Theorem 1.4.6], [Car19, Proposition 4.3.2] pour la réciproque. \square

Ces deux résultats nous permettent de finaliser la hiérarchie que nous avons exposée à la section précédente :

$$\begin{array}{ccc} \text{non ramifiée} & \implies & \text{potentielle non ramifiée} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{cristalline} & \implies & \text{de Rham} \implies \text{Hodge-Tate.} \end{array}$$

Nous obtenons également une description explicite des caractères cristallins. Ils se composent d'un morceau non ramifié et d'une puissance entière du caractère cyclotomique.

Corollaire 7.13. — *Un caractère continu $\eta: G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ est cristallin si et seulement si $\eta = \mu\chi^n$ où $n \in \mathbf{Z}$ et $\mu: G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ est continu et non ramifié.*

Démonstration. — Si η est cristallin, alors il est de de Rham par la Proposition 7.10. On peut alors l'écrire sous la forme du Corollaire 5.12. La partie potentiellement non ramifiée est également cristalline et est donc non ramifiée par la Proposition 7.12. Réciproquement, μ et χ^n sont cristallins par 7.12 et donc η aussi par stabilité au produit tensoriel. \square

Remarque 7.14. — Si $\mu: G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ est un caractère continu non ramifié, il se factorise par G_k qui est topologiquement engendré par le Frobenius absolu du corps résiduel k de K . Par conséquent μ est complètement déterminé par l'image $\lambda \in \mathbf{Z}_p^\times$ de ce Frobenius. On le note $\mu = \mu_\lambda$.

Comme nous l'avons fait pour les représentations de de Rham, nous allons à présent raffiner l'image essentielle du foncteur \mathbf{D}_{cris} . Soit V une représentation p -adique de G_K , on munit $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ d'une structure de φ -module filtré sur K en induisant

$$(3) \quad \varphi \otimes \text{id}_V: \mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \longrightarrow \mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

aux points fixes par G_K -équivariance de φ . Cela définit une application semi-linéaire relativement à σ et bijective par le théorème du rang. On récupère une filtration via le plongement canonique $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)_K \subseteq \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$.

Théorème 7.15. — *Le foncteur $\mathbf{D}_{\text{cris}}: \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}^{\text{cris}}(G_K) \rightarrow \mathbf{MF}_K(\varphi)$ est pleinement fidèle. Il est exact et commute à la somme directe, au produit tensoriel et au passage au dual.*

Démonstration. — On montre la première assertion ; la deuxième est une généralisation du Corollaire 2.14. Afin de montrer que cette restriction de \mathbf{D}_{cris} est pleinement fidèle, on montre qu'elle a un quasi-inverse à gauche. Soit V une représentation cristalline de G_K . On peut montrer que l'isomorphisme de comparaison

$$\alpha_{\text{cris}}(V): \mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) \longrightarrow \mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

commute à l'action diagonale de G_K et au φ défini dans le même état d'esprit qu'en (3). Son extension K -linéaire est un isomorphisme de \mathbf{Fil}_K . En passant aux points fixes de φ (symbolisé par $\varphi = 1$), puis au cran 0 de la filtration on obtient

$$\begin{aligned} \text{Fil}^0((\mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\text{cris}}(V))^{\varphi=1}) &\simeq \text{Fil}^0((\mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\varphi=1}) \\ &= (\text{Fil}^0 \mathbf{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V. \end{aligned}$$

La dernière étape consiste à montrer que le facteur de gauche de l'expression finale est \mathbf{Q}_p , voir par exemple [FO22, Theorem 7.28]. \square

On obtient un quasi-inverse à gauche du foncteur \mathbf{D}_{cris} restreint aux représentations cristallines de G_K :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{cris}}: \mathbf{MF}_K(\varphi) &\longrightarrow \mathbf{Q}_p[G_K]\text{-mod} \\ D &\longmapsto \text{Fil}^0((\mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}). \end{aligned}$$

Connaître l'image essentielle de la restriction du foncteur \mathbf{D}_{cris} nous offrirait une équivalence de catégories. Cette image est assez énigmatique et il a fallu une dizaine d'années de travail pour en percer le mystère. Nous allons

modestement exposer sans preuves le cheminement vers celle-ci. On dit qu'un φ -module filtré est admissible s'il est dans l'image essentielle du foncteur \mathbf{D}_{cris} . Compte tenu de la construction de la filtration, il est raisonnable de s'attendre à une relation entre l'opérateur de Frobenius et la filtration.

Définition 7.16. — Étant donné D un φ -module filtré sur K , on définit :

- son nombre de Hodge par $t_{\text{H}}(D) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} n \dim_K \text{gr}^n D_K$.
- son nombre de Newton par $t_{\text{N}}(D) = v_p(\det \varphi)$.

Le nombre de Newton est indépendant de la base choisie car le déterminant d'une application semi-linéaire est unique à multiplication près par un élément de norme 1.

Exemple 7.17. — Soit $\eta = \mu_\lambda \chi^n$ un caractère continu cristallin où $\lambda \in \mathbf{Z}_p^\times$ et $n \in \mathbf{Z}$. On note V la représentation p -adique associée. Son image se décompose en les morceaux élémentaires

$$\mathbf{D}_{\text{cris}}(V) = \mathbf{D}_{\text{cris}}(\mathbf{Q}_p(\mu_\lambda)) \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\text{cris}}(\mathbf{Q}_p(n)).$$

On sait que t^{-n} est une période cristalline du facteur de droite et que φ agit sur celle-ci en la multipliant par p^{-n} . En ce qui concerne le facteur de gauche, on sait qu'il provient d'une représentation cristalline et donc qu'il existe $u \in \mathbf{B}_{\text{cris}}^\times$ sur lequel $g.u = u/\mu_\lambda(g)$ pour tout $g \in G_K$. Déterminons l'action du Frobenius sur cette période. Comme μ_λ est non ramifié, on sait que $\varphi^{\circ f}(u) = \lambda^{-1}u$ où f est le degré de K_0 sur \mathbf{Q}_p . Si $\alpha \in K_0^\times$ est la valeur propre de φ en u , sa norme sur \mathbf{Q}_p doit valoir λ^{-1} . Les deux morceaux remis ensemble, $u \otimes t^{-n}$ est une période de η et on trouve que $t_{\text{N}}(\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)) = -n$. D'un autre côté V est dimension 1 et donc la filtration a un unique saut de multiplicité 1. On voit ici qu'il est en $-n$ et donc $t_{\text{H}}(\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)) = -n$.

L'exemple précédent décrit complètement la situation des φ -modules filtrés sur K admissibles de dimension 1. On constate que les nombres de Hodge et Newton sont égaux. La situation se généralise en dimension supérieure. On y voit aussi une compatibilité sur les sous-objets.

Définition 7.18. — Un φ -module filtré D sur K est dit faiblement admissible si $t_{\text{H}}(D) = t_{\text{N}}(D)$ et si $t_{\text{H}}(D') \leq t_{\text{N}}(D')$ pour tout sous-objet D' de D .

Nous avons montré que les φ -modules filtrés admissibles de dimension 1 sont faiblement admissibles. Cela est vrai pour n'importe quelle dimension finie. On a alors conjecturé que la faible admissibilité est équivalente à l'admissibilité et finalement Colmez et Fontaine [CF00] sont parvenus à le montrer.

Théorème 7.19. — *Un φ -module filtré sur K est admissible si et seulement s'il est faiblement admissible.*

La démonstration de ce résultat est éprouvante. On renvoie le lecteur curieux ou courageux vers l'article original pour cette raison. Quoi qu'il en est, prenons le temps de savourer sa conséquence. Le foncteur

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\text{cris}} : \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}^{\text{cris}}(G_K) &\longrightarrow \mathbf{MF}_K^{\text{adm}}(\varphi) \\ V &\longmapsto (\mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories entre les représentations cristallines de G_K et les φ -modules filtrés (faiblement) admissibles sur K , de quasi-inverse donné par \mathbf{V}_{cris} . Cette association est de plus exacte et commute à la somme directe, au produit tensoriel et au passage au dual. Cette équivalence est très utile en pratique car elle décrit des objets complexes à partir d'objets simples de nature semi-linéaire.

Remarque 7.20. — Sont associés aux nombres de Hodge et de Newton des polygones. Le premier retrace les sommes partielles définissant t_{H} . Le deuxième est le polygone de Newton du polynôme caractéristique de φ . La condition de (faible) admissibilité se traduit visuellement. Le premier point signifie que les polygones se terminent à la même coordonnée et le deuxième point signifie que le polygone de Hodge est en dessous de celui de Newton.

Exemple 7.21. — Soit D un φ -module filtré sur K de dimension 1. On se donne (d) une base de D sur K_0 . Il existe un $\alpha \in K_0^\times$ tel que $\varphi(d) = \alpha d$ et on a $t_{\text{N}}(d) = v_p(\alpha)$. Comme D est une droite, elle admet un unique saut $s \in \mathbf{Z}$ et donc $t_{\text{H}}(D) = s$. Par conséquent, D est admissible si et seulement si $v_p(\alpha) = s$. Le cas échéant, déterminons la représentation cristalline sous-jacente. On voit facilement que

$$D \simeq \mathbf{D}_{\text{cris}}(\mathbf{Q}_p(\mu_{\lambda\chi^n}))$$

où $\lambda = \text{Nm}(p^{-t_{\text{N}}(D)}\alpha)^{-1}$ et où $n = -t_{\text{H}}(D)$ de par notre analyse en 7.17. Dans l'expression précédente, Nm désigne la norme de K_0 sur \mathbf{Q}_p . On remarque que le caractère cyclotomique agit sur la situation par décalage de la filtration.

Compte tenu de cette description, on revient à l'Exemple 7.7 pour lequel on décrit précisément la représentation que l'on manipulait.

Exemple 7.22. — Étant donné \mathcal{F}/\mathbf{Z}_p un groupe formel unidimensionnel de hauteur 1, on a construit en 7.7 une période cristalline de $V_p(\mathcal{F})$, à savoir $t_{\mathcal{F}}^{-1}$. Par (C) on a

$$\varphi(t_{\mathcal{F}}) = \log_{\mathcal{F}}(\varphi(\hat{v})) = \log_{\mathcal{F}}([p](\hat{v})) = pt_{\mathcal{F}}.$$

Donc le nombre de Newton associé à son φ -module filtré admissible vaut -1 . On retrouve alors l'action du caractère cyclotomique. Cela n'est pas surprenant car tous les groupes formels de hauteur 1 sur \mathbf{Z}_p sont de Lubin-Tate et ceux-là sont isomorphes.

Références

- [Bos20] G. BOSCO — *Représentations cristallines*. Mémoire de Master, Université de Mons (2020).
- [Bos23] G. BOSCO — *The 3-adic representations arising from elliptic curves over \mathbb{Q}_3 with potential good reduction*. arXiv preprint 2302.13592 (2023).
- [Bri21] O. BRINON — *On the injectivity of Frobenius on p -adic period rings*. Proceedings of the American Mathematical Society, 150, pp.75-78 (2021).
- [BC09] O. BRINON, B. CONRAD — *CMI Summer School notes on p -adic Hodge theory*. Preliminary version (2009).
- [Car19] X. CARUSO — *An introduction to p -adic period rings*. Société Mathématique de France. An excursion into p -adic Hodge theory: from foundations to recent trends, 54, Panoramas et Synthèses (2019).
- [CI97] R. COLEMAN, A. IOVITA — *The frobenius and monodromy operators for curves and abelian varieties*. arXiv preprint 9701229 (1997).
- [Col02] P. COLMEZ — *Espaces de Banach de dimension finie*. Journal of the Institut of Mathematics Jussieu 1(3), 331-439 (2002).
- [CF00] P. COLMEZ, J.-M. FONTAINE — *Construction des représentations p -adiques semi-stables*. Inventiones mathematicae 140, 1-43 (2000).
- [Fon94] J.-M. FONTAINE — *Le corps des périodes p -adiques*. In: Périodes p -adiques, Astérisque 223, Société Mathématique de France (1994).
- [FO22] J.-M. FONTAINE, Y. OUYANG — *Theory of p -adic Galois Representations*. Springer (2022).
- [Pha23] D. PHAM — *Moduli stacks of Lubin-Tate (φ, Γ) -modules*. arXiv preprint 2302.09534 (2023).
- [Spe18] J. SPECTER — *The Crystalline Period of a Height One p -adic Dynamical System*. Transactions of the American Mathematical Society 370, no. 5, 3591-3608 (2018).
- [Vol05] M. VOLKOV — *A class of p -adic Galois representations arising from abelian varieties over \mathbb{Q}_p* . Mathematische Annalen 331(4), 889-923 (2005).