REPRÉSENTATIONS C-LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

Martin Debaisieux

Motivation

Les représentations de groupe décrivent les éléments d'un groupe en termes d'applications linéaires inversibles. La théorie des représentations permet ainsi de réduire les questions d'algèbre abstraite à des questions d'algèbre linéaire (comme par exemple des aspects de non-commutativité). L'un des principaux objectifs de la théorie des représentations est de classer toutes les représentations irréductibles d'un groupe, à isomorphisme près.

1 Théorie des représentations

Dans ces notes, **nous travaillons exclusivement avec des espaces vectoriels complexes**. Ce choix est motivé par les bonnes propriétés de $\mathbf{C}$: un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.

Définition 1.1. Une *représentation* ($\mathbf{C}$*-linéaire*) (ρ, V) d'un groupe G dans un espace vectoriel complexe V est un morphisme de groupes $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$.

Remarque 1.2. Une représentation est une action linéaire de G sur V. Le vocabulaire lié aux actions fait alors sens. Par exemple : une représentation (ρ, V) est *fidèle* si $G \to \mathrm{GL}(V)$ est un monomorphisme.

Ce document tient lieu d'introduction à la matière, pour cette raison **nous nous restreignons au cas des groupes finis**. Il est courant de référencer une action par le morphisme sous-jacent ρ ; parfois par l'espace vectoriel sous-jacent V. Cette deuxième situation requiert l'absence d'ambiguïté dans la flèche associée.

Exemple 1.3. Considérons le groupe symétrique $\mathrm{S}_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$. Nous définissons trois représentations bien connues de S_3 :

— La représentation triviale $\rho^1\colon \mathrm{S}_3 \to \mathbf{C}^\times$ donnée par $\sigma \mapsto 1$.

— La représentation signée $\rho^2\colon \mathrm{S}_3 \to \mathbf{C}^\times$ donnée par $\sigma \mapsto \mathrm{sgn}(s)$.

— La représentation de permutation $\rho^3\colon \mathrm{S}_3 \to \mathrm{GL}(\mathbf{C}^3)$ donnée par :

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (132) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons déjà classer ces représentations à partir d'un critère simple mais important :

Définition 1.4. Le *degré* (parfois aussi appelé *dimension*) d'une représentation (ρ, V) est la dimension de V en tant que $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

Exemple 1.5. Les représentations ρ^1, ρ^2 sont de degré 1 et la représentation ρ^3 est de degré 3.

Exemple 1.6. Soit G un groupe. Nous appelons *représentation triviale* de G dans V la représentation $G \to \mathrm{GL}(V)\colon s \mapsto \mathrm{Id}_V$ agissant trivialement sur V. En particulier $\mathbf{C}^\times$ est une représentation de G.

Exemple 1.7. Les représentations de degré 1 d'un groupe G sont les morphismes $\rho\colon G \to \mathbf{C}^\times$. Puisque tout élément de G est d'ordre fini, l'image $\rho(s)$ d'un élément $s \in G$ est racine de l'unité. En particulier $|\rho(s)| = 1$ pour tout $s \in G$. Nous appelons *représentation unité* la représentation triviale $G \to \mathbf{C}^\times$.

Remarque 1.8. Soit $(\rho, \mathbf{C})$ une représentation de degré 1 d'un groupe G. Puisque $\mathbf{C}^\times$ est abélien, le noyau de ρ doit contenir le sous-groupe dérivé $D(G)$ de G ; ainsi ρ se factorise à travers $D(G)$:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & \mathbf{C}^\times \\ G/D(G) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

En d'autres mots, il suffit d'étudier les représentations de degré 1 du groupe abélien $G/D(G)$.

Exemple 1.9. Le groupe diédral $D_{2n} = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$ agit naturellement sur le n-gône régulier et induit une action sur $\mathbf{C}^2$ via :

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette action est une représentation de degré 2 de D_{2n} dans $\mathbf{C}^2$.

Exemple 1.10. Soit X un ensemble fini à n éléments sur lequel un groupe G agit. Considérons un espace vectoriel V dont une base $(e_x)_{x \in X}$ est indicée par les éléments de X (alors $\dim V = n$). Nous faisons agir G sur V en posant $\rho(s)(e_x) = e_{sx}$ où sx désigne l'action de s sur x. Cette représentation est appelée *représentation de permutation* associée à X.

Exemple 1.11. Si X est un quotient G/H de G et que l'action sur G est l'action naturelle sur les classes $g(kH) = (gk)H$ alors nous obtenons la représentation de permutation associée à $H \leq G$. Noter que si $H = G$ alors il s'agit de la représentation triviale. Un cas important est lorsque $X = G$. Alors G agit sur G par multiplication à gauche. La représentation de permutation obtenue est appelée *représentation régulière* de G.

Exemple 1.12. Si G est le groupe cyclique fini $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, la donnée d'une représentation de G sur V équivaut au choix d'un élément f de $\mathrm{GL}(V)$ tel que $f^n = \mathrm{Id}_V$.

Maintenant que nous manipulons des représentations, nous adoptons des notations plus concises : nous notons ρ_s au lieu de $\rho(s)$; et si le contexte est suffisamment clair nous notons sx au lieu de $\rho(s)(x)$ pour l'action de s sur x. Nous explorons désormais un autre critère de classification, basé sur la notion de réductibilité.

Définition 1.13. Une représentation (ρ, W) avec $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ est une *sous-représentation* de (ρ, V) si $W \subseteq V$ est un sous-espace invariant sous l'action de G.

Exemple 1.14. Soit (ρ, V) une représentation d'un groupe G. Notons V^G l'ensemble des points fixes de V sous l'action de G. Alors (ρ, V^G) une sous-représentation de (ρ, V). Plus généralement, si H est un sous-groupe normal de G alors (ρ, V^H) est une sous-représentation de (ρ, V).

Exemple 1.15. Supposons que (ρ, V) est la représentation régulière de G. Soit W le sev de V de dimension 1 engendré par les éléments de la forme $x = \sum_{s \in G} e_s$. Alors $\rho_s(x) = x$ pour tout $s \in G$ et donc (ρ, W) est une sous-représentation de V (isomorphe à le représentation unité).

Définition 1.16. Une représentation (ρ, V) de G est *irréductible* si les seuls sous-espaces G-invariants de V sont 0 et V. La représentation est *réductible* sinon.

Il nous arrivera de dire que V est irréductible ; auquel cas nous ferons bien sûr allusion au fait que la représentation (ρ, V) est irréductible.

Exemple 1.17. Toute représentation de degré 1 est irréductible. Nous verrons plus tard que tout groupe non abélien admet au moins une représentation irréductible de degré au moins 2.

Exemple 1.18. Soit (ρ, V) une représentation irréductible de G. Sous ces hypothèses la représentation $(\bar{\rho}, V)$ donnée par $\bar{\rho}\colon G/\operatorname{Ker}(\rho) \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible (et fidèle) de $G/\operatorname{Ker}(\rho)$.

Proposition 1.19. Soit (ρ, V) une représentation d'un groupe G et soit (ρ, W) une sous-représentation de (ρ, V). Il existe un complémentaire W^0 de W dans V étant une sous-représentation de V.

Preuve. Soit W' un complémentaire de W dans V et notons $p\colon V \to W$ la projection de V sur W parallèlement à W'. Considérons la moyenne :

$$p^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ p \circ \rho_t^{-1}.$$

Étant donné que p envoie les éléments de V dans W et que ρ_t préserve W pour tout $t \in G$, l'application p^0 envoie les éléments de V dans W. De plus $\rho_t^{-1}(x) \in W$ pour n'importe quels $x \in W$ et $t \in G$. Donc :

$$p^0(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \rho_t^{-1}(x) = x.$$

Ainsi p^0 est la projection de V sur W correspondante à un complémentaire W^0 de W dans V. Nous montrons finalement que W^0 est stable sous l'action de G. Clairement p^0 commute avec ρ_s pour tout $s \in G$. Si $x \in W^0$ alors $p^0(x) = 0$ et donc $p^0 \circ \rho_s(x) = \rho_s \circ p_0(x) = 0$; autrement dit $\rho_s(x) \in W^0$ pour tout $s \in G$. □

Remarque 1.20. Nous déduisons une reformulation de l'irréductibilité des représentations : (ρ, V) est irréductible ssi V ne s'écrit pas comme une somme directe de deux sous-représentations.

Théorème 1.21. Toute représentation est la somme directe de sous-représentations irréductibles.

Preuve. Soit (ρ, V) une représentation d'un groupe G. Nous procédons par induction sur la dimension de V. Si $\dim V = 0$ alors il n'y a rien à prouver puisque 0 est la somme directe d'une famille vide de représentations irréductibles. Supposons que $\dim V \geq 1$ et que V n'est pas irréductible (trivial sinon). Nous écrivons $V = V_1 \oplus V_2$ avec $\mathrm{Max}\{\dim V_1, \dim V_2\} < \dim V$. L'hypothèse d'induction nous permet d'écrire V_1 et V_2 comme somme directe de représentations irréductibles et donc V aussi. □

Remarque 1.22. Il est légitime de s'intéresser à l'unicité de cette décomposition. Nous répondrons plus tard à cette question.

Exemple 1.23. Revenons à l'exemple 1.3, évidemment ρ^1 et ρ^2 sont irréductibles puisqu'elles sont de degré 1. Par contre ρ_3 (comme toute représentation de permutation) est réductible. Considérons $V_1 = \langle (1,1,1) \rangle$ et $V_2 = \{(a,b,c) \in \mathbf{C}^3 \mid a+b+c=0\}$; alors

$$\mathbf{C}^3 = V_1 \oplus V_2.$$

Nous pouvons montrer que V_1 et V_2 sont tous deux des sev G-invariants de $\mathbf{C}^3$ non triviaux. Nous écrivons les éléments de l'image de ρ^3 en termes d'une nouvelle base $B = (b_1, b_2, b_3)$ via la réunion d'une base de V_1 et de V_2 : prenons $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)$ et $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$. Nous obtenons une "nouvelle" représentation $\tilde{\rho}^3$ de permutation dans la base B :

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (123) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(12) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (23) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (132) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Le choix de cette base n'était pas anodin : elle diagonalise par bloc toutes les matrices en une matrice 1×1 et une matrice 2×2. Ceci suggère que $\tilde{\rho}^3$ est réductible ; elle peut être décomposée en deux sous-représentations dont l'une est triviale. En isolant la matrice 2×2 nous obtenons une représentation de degré 2 (appelée *représentation standard* de S_3). Nous verrons plus tard que celle-ci est irréductible.

Remarque 1.24. Finalement les représentations ρ^3 et $\tilde{\rho}^3$ désignent la même représentation modulo le choix de la base dans laquelle nous écrivons les éléments de $\mathbf{C}^3$. La notion de G-isomorphisme vient formaliser cela.

Définition 1.25. Un *G-morphisme* entre deux représentations (ρ, V) et (ρ', V') d'un groupe G est une application $\mathbf{C}$-linéaire $f \colon V \to V'$ commutant avec l'action de G, *i.e.* faisant commuter le diagramme pour tout $s \in G$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_s"'] & V' \arrow[d, "\rho'_s"] \\ V \arrow[r, "f"] & V' \end{tikzcd}$$

Remarque 1.26 (catégorique)**.** Il est facile de constater que la composée de G-morphismes (compatibles) est un G-morphisme ; l'argument passe par la commutation du diagramme :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_s"] & V' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho'_s"] & V'' \arrow[d, "\rho''_s"] \\ V \arrow[r, "f"] & V' \arrow[r, "g"] & V'' \end{tikzcd}$$

Ainsi les représentations $\mathbf{C}$-linéaires d'un groupe fini G forment une catégorie (abélienne), notée $\mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(G)$. Les objets de cette catégorie sont les représentations (ρ, V) et les flèches sont les G-morphismes. Noter que la notion de sous-objet est matérialisée par les sous-représentations.

Remarque 1.27. Si $f \colon V \to V'$ est un G-morphisme alors $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ est une sous-représentation de V et $\mathrm{Im}(f) = f(V)$ est une sous-représentation de V'.

Définition 1.28. Un *G-isomorphisme* est un isomorphisme linéaire commutant avec l'action de G. Si un G-isomorphisme existe entre (ρ, V) et (ρ', V') nous disons qu'ils sont *isomorphes* et nous noterons $(\rho, V) \simeq (\rho', V')$ (ou plus simplement $\rho \simeq \rho'$).

Remarque 1.29. Des représentations isomorphes sont de même degré.

Exemple 1.30. Pour notre discussion sur S_3, nous avons des représentations de permutation $(\rho^3, \mathbf{C}^3)$ dans la base standard et $(\tilde{\rho}^3, \mathbf{C}^3)$ dans la base B. Noter que

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

est la matrice dans la base standard d'un isomorphisme linéaire $\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ commutant avec l'action de G. Par conséquent $\rho^3 \simeq \tilde{\rho}^3$, comme annoncé. Puisque $\tilde{\rho}^3$ est réductible, il en va de même pour ρ^3.

Exemple 1.31. Soit (ρ, V) la représentation régulière d'un groupe G et soit W le sev de V de dimension 1 engendré par les éléments de la forme $x = \sum_{s \in G} e_s$. Alors $\rho_s(x) = x$ pour tout $s \in G$ et donc (ρ, W) est une sous-représentation de (ρ, V), isomorphe à la représentation unité.

2 Opérations sur les représentations

⋄ Nous donnons différents outils afin de construire de nouvelles représentations à partir de représentations existantes. Nous avons déjà discuté de la somme directe :

Définition 2.1. La *somme directe* $(\rho \oplus \rho', V \oplus V')$ de deux représentations (ρ, V) et (ρ', V') d'un groupe G est la représentation de G donnée par :

$$\rho \oplus \rho' \colon \left\{ \begin{array}{ccl} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V \oplus V') \\ s & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} V \oplus V' & \longrightarrow & V \oplus V' \\ v + v' & \longmapsto & \rho_s(v) + \rho'_s(v'). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Remarque 2.2. Le degré de la somme directe $(\rho \oplus \rho', V \oplus V')$ est $\dim(V \oplus V') = \dim V + \dim V'$, c'est-à-dire la somme des degrés de (ρ, V) et (ρ', V').

⋄ Nous pouvons également considérer le produit tensoriel de représentations (obtenu par la propriété universelle du produit tensoriel) :

Définition 2.3. Le *produit tensoriel* $(\rho \otimes \rho', V \otimes V')$ de deux représentations (ρ, V) et (ρ', V') d'un groupe G est la représentation de G donnée par :

$$\rho \otimes \rho' \colon \left\{ \begin{array}{ccl} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V \otimes V') \\ s & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} V \otimes V' & \longrightarrow & V \otimes V' \\ v \otimes v' & \longmapsto & \rho_s(v) \otimes \rho'_s(v'). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Remarque 2.4. Le degré du produit tensoriel $(\rho \otimes \rho', V \otimes V')$ est $\dim(V \otimes V') = \dim V \dim V'$, c'est-à-dire le produit des degrés de (ρ, V) et (ρ', V').

⋄ Une troisième construction est obtenue au moyen du passage au dual de V, noté V^*. Nous admettons que ce morphisme est une représentation de G.

Définition 2.5. La *duale* (ρ^*, V^*) d'une représentation (ρ, V) d'un groupe G est la représentation de G donnée par :

$$\rho^* \colon \left\{ \begin{array}{ccl} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V^*) \\ s & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} V^* & \longrightarrow & V^* \\ v^* & \longmapsto & v^* \circ \rho_{s^{-1}}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Remarque 2.6. Le degré du dual (ρ^*, V^*) est $\dim V^* = \dim V$, c'est-à-dire le degré de (ρ, V).

3 Les blocs de construction des représentations

Définition 3.1. Une représentation (ρ, V) est *totalement réductible* (ou parfois *semi-simple* ☺) si V se décompose en éléments simples, c'est-à-dire si $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ avec chaque (ρ, V_i) irréductible.

Remarque 3.2. Les représentations totalement réductibles ne sont pas nécessairement réductibles. Toute représentation irréductible (ρ, V) est totalement réductible puisque V est la somme directe de la famille d'irréductibles (V). Afin d'éviter toute malheureuse confusion (et pour adopter un vocabulaire catégorique), nous utiliserons la dénomination *semi-simple*.

Théorème 3.3 (Maschke)**.** Toute représentation **C**-linéaire d'un groupe fini est totalement réductible.

Preuve. Soit (ρ, V) une représentation d'un groupe G et notons $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ un produit hermitien sur V. Nous définissons la moyenne :

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \langle \rho_t(v), \rho_t(w) \rangle_0.$$

Très clairement il s'agit d'un produit hermitien sur V puisque $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ l'est. Sa construction lui fournit un avantage : $\langle \rho_s(v), \rho_s(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ pour tout $s \in G$ et tous $v, w \in V$ (invariant sous l'action de G). Cette propriété est dûe à la transitivité de l'action de multiplication à gauche.

Considérons désormais W un sous-espace G-invariant de V. Sous notre produit hermitien invariant, $\langle \rho_s(v), w\rangle = \langle v, \rho_{s^{-1}}(w)\rangle = 0$ pour tous $v \in W^{\perp}$ et $w \in W$ étant donné que W est G-invariant. Par conséquent $W^{\perp}$ est lui aussi un sous-espace G-invariant de V.

Nous procédons par induction sur la dimension de V. Si $\dim V = 1$ alors ρ est irréductible. Supposons que si $\dim V \leq n-1$ alors ρ est semi-simple. Si $\dim V = n$; soit ρ est irréductible est donc c'est terminé, soit ρ est réductible et il existe un sous-espace G-invariant $W \subset V$ tel que $V = W \oplus W^{\perp}$. De par l'hypothèse d'induction (ρ, W) et $(\rho, W^{\perp})$ sont semi-simples et donc (ρ, V) aussi. □

Théorème 3.4 (Lemme de Schur)**.** Soient (ρ, V) et (ρ', V') deux représentations d'un groupe fini G et soit $f\colon V \to V'$ un G-morphisme. Alors :

- **(a)** Soit f est un G-isomorphisme, soit $f = 0$.
- **(b)** Si $V = V'$ alors f est une homothétie, c'est-à-dire $f = \lambda \operatorname{Id}_V$ pour un $\lambda \in \mathbf{C}$.

Preuve. Supposons $f \neq 0$ et montrons que f est un G-morphisme. Comme $(\rho, \operatorname{Ker}(f))$ est une sous-représentation d'une représentation irréductible (ρ, V) : soit $\operatorname{Ker}(f) = 0$, soit $\operatorname{Ker}(f) = V$. De par notre hypothèse $\operatorname{Ker}(f) = 0$. De la même manière nous montrons que $\operatorname{Im}(f) = V'$ et ainsi f est un G-morphisme bijectif, *i.e.* un G-isomorphisme.

Supposons que $V = V'$. Comme $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, f admet une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$. Comme f et $\lambda \operatorname{Id}_V$ sont des G-morphismes, $f - \lambda \operatorname{Id}_V \colon V \to V$ en est un également. Puisque $\lambda \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_V)$, nous obtenons du point précédent que $f - \lambda \operatorname{Id}_V = 0$, autrement dit $f = \lambda \operatorname{Id}_V$. □

Corollaire 3.5. Pour toute représentation de degré finie (ρ, V) d'un groupe fini G il existe une décomposition $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_m^{\oplus a_m}$ où les V_i sont des irréductibles distincts. Cette décomposition de V en une somme directe des m facteurs est unique, de même que les V_i apparaissant et leurs multiplicités.

Preuve. Par le théorème de Maschke nous savons qu'il est possible de décomposer V de cette manière. Si $V = W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_\ell^{\oplus b_\ell}$ est une autre décomposition de V alors le lemme de Schur appliqué à Id_V montre que pour tout i, il existe un j tel que $V_i \simeq W_j$ et $V_i \not\simeq W_k$ pour tous les autres $k \neq j$. Nous en concluons l'unicité. □

4 Théorie des caractères

Nous introduisons la notion de caractère d'une représentation. Comme son nom l'indique, cette application caractérise la représentation : en étudiant le caractère d'une représentation nous serons par exemple capable de déterminer si celle-ci est irréductible ou non.

Définition 4.1. Le *caractère* d'une représentation (ρ, V) d'un groupe G est l'application $\chi_\rho\colon G \to \mathbf{C}$ donnée par $\chi_\rho(s) = \operatorname{Tr}(\rho_s)$ pour tout $s \in G$.

S'il n'y aucune ambiguïté sur la représentation (ρ, V) considérée, il nous arrivera de noter χ_V au lieu de χ_ρ. Nous dirons également qu'un caractère χ_ρ est irréductible si la représentation (ρ, V) l'est.

Exemple 4.2. Il est d'usage de présenter les caractères d'un groupe (ici S_3) sous forme d'un tableau. Ce tableau reprend chacun des caractères irréductibles du groupe en question et donne pour chaque élément de celui-ci la valeur du caractère associé.

S_3	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
Représentation triviale	1	1	1	1	1	1
Représentation signée	1	-1	-1	-1	1	1
Représentation standard	2	0	0	0	-1	-1

Table 1 – Table des caractères de S_3

Noter que le caractère de chacune des représentations en e vaut le degré de la représentation.

Proposition 4.3. Soit (ρ, V) une représentation d'un groupe G et soit $\chi\colon G \to \mathbf{C}$ son caractère.

(a) $\chi(1) = \dim V$.

(b) $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$ pour tous $s,\ t \in G$.

Preuve. En effet $\chi(1) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_V) = \dim V$. Le deuxième point équivaut à $\chi(ab) = \chi(ba)$ en prenant $a = ts$ et $b = t^{-1}$. Ainsi il découle d'une propriété élémentaire de la trace : $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(g \circ f)$. $\square$

Proposition 4.4. Soient (ρ, V) et (ρ', V') deux représentations d'un groupe G. Le caractère de leur somme directe est la somme des caractères des représentations : $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.

Preuve. Soit B une base de V et soit C une base de V'. La réunion de B et C est une base de $V \oplus V'$. La matrice associée à un élément $s \in G$ dans cette base est de la forme :

$$\begin{pmatrix} M_B(\rho_s) & 0 \\ 0 & M_C(\rho'_s) \end{pmatrix}$$

où $M_B(\rho_s)$ est la matrice ρ_s dans la base B et $M_C(\rho'_s)$ est la matrice ρ'_s dans la base C. Le résultat est alors immédiat. $\square$

Proposition 4.5. Soient (ρ, V) et (ρ', V') deux représentations d'un groupe G. Le caractère de leur produit tensoriel est le produit des caractères des représentations : $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$.

Preuve. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et soit $C = (f_1, \ldots, f_m)$ une base de V'. Nous obtenons une base de $V \otimes V'$ en considérant la suite $(e_i \otimes f_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$. La matrice associée à un élément $s \in G$ dans cette base est de la forme :

$$M_B(\rho_s) \otimes M_C(\rho'_s) = \begin{pmatrix} a_{11} M_C(\rho'_s) & \cdots & a_{1n} M_C(\rho'_s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} M_C(\rho'_s) & \cdots & a_{nn} M_C(\rho'_s) \end{pmatrix}$$

où $M_B(\rho_s) = (a_{ij})_{i,j}$ la matrice de ρ_s dans la base B et $M_C(\rho'_s)$ la matrice de ρ'_s dans la base C. À nouveau le résultat s'en suit. $\square$

Proposition 4.6. Soit (ρ, V) une représentation d'un groupe G. Le caractère de la représentation duale est le conjugué complexe du caractère de la représentation : $\chi_{V^*} = \bar{\chi}_V$.

Preuve. Rappelons que la trace d'une application linéaire est également la somme de ses valeurs propres (en tenant compte de leur multiplicité). Pour tout $s \in G$ l'application linéaire $\rho_s^{\intercal}\colon V^* \to V^*$ possède les mêmes valeurs propres que ρ_s. Comme ρ_s est d'ordre fini, chaque valeur propre λ est sur le cercle unité de $\mathbf{C}$ et donc $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$. Le résultat s'en suit. $\square$

5 Relations d'orthogonalité de Schur

Définition 5.1. Soient (ρ, V) et (ρ', V') deux représentations d'un groupe G. Soient χ et ψ leur caractère respectif. Le *produit hermitien* de χ et ψ est défini par :

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \overline{\psi(t)} \chi(t).$$

Nota Bene 5.2. Clairement cette application est $\mathbf{C}$-linéaire en χ et $\mathbf{C}$-semi-linéaire en ψ. Elle vérifie également $\langle \chi, \chi \rangle > 0$ pour tout $\chi \neq 0$. Noter que $\langle \chi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \chi \rangle}$ pour tous caractères χ, ψ.

Théorème 5.3. Soient χ et ψ deux caractères respectifs de représentations irréductibles (ρ, V) et (ρ', V') d'un groupe G. Alors :

$$\langle \chi, \psi \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \simeq \rho' \\ 0 & \text{si } \rho \not\simeq \rho'. \end{cases}$$

Preuve. Soit $V^G = \{v \in V \mid \rho_s(v) = v \text{ pour tous } s \in G\}$ le stabilisateur de V sous l'action de G. Nous définissons un G-morphisme $V \to V^G$ en moyennant :

$$\phi = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t.$$

Nous vérifions facilement que $\mathrm{Im}(\phi) = V^G$ et donc $\phi \circ \phi = \phi$. Ainsi ϕ est une projection de V dans V^G. D'un autre côté nous rappelons que les seules valeurs propres possibles d'une application idempotente sont 0 et 1. Alors :

$$\dim V^G = \mathrm{Tr}(\phi) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \chi(t).$$

(Noter que la dimension de V^G vaut la multiplicité de la représentation triviale dans la décomposition de V.)

Considérons $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ l'espace vectoriel des G-morphismes $V \to V'$. Soit $f \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$; alors pour tous $s \in G$ et $v \in V$ nous avons $\rho'_s \circ f(v) = f \circ \rho_s(v)$. Donc $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ est un sous-espace G-invariant de $\mathrm{Hom}(V, V')$. Par le lemme de Schur :

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, V') = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \simeq \rho' \\ 0 & \text{si } \rho \not\simeq \rho'. \end{cases}$$

Noter que puisque V est de dimension finie, $\mathrm{Hom}_G(V, V') \simeq V^* \otimes V'$. Nous définissons une représentation ω de G dans $\mathrm{Hom}(V, V')$ par :

$$s \quad \longmapsto \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(V, V') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V, V') \\ f & \longmapsto & \rho'_s \circ f \circ \rho_{s^{-1}}. \end{array} \right.$$

Sous cette représentation $\mathrm{Hom}_G(V, V') = \mathrm{Hom}(V, V')^G$. De par les caractères des constructions élémentaires nous avons $\chi_\omega(s) = \bar{\chi}(s)\psi(s)$ pour tout $s \in G$. En substituant avec le premier paragraphe nous obtenons finalement :

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \overline{\psi(t)} \chi(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \bar{\chi}_w(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \simeq \rho' \\ 0 & \text{si } \rho \not\simeq \rho'. \end{cases}$$

□

Corollaire 5.4. En termes de ce produit hermitien, les caractères de représentations irréductibles d'un groupe G sont orthonormaux.

Exemple 5.5. Dans la table 1 des caractères de S_3, nous savons pour l'instant que ρ^1 et ρ^2 sont irréductibles. Ces représentations ne sont pas isomorphes puisque $\langle \chi_{\rho^1}, \chi_{\rho^2} \rangle = \frac{1}{6}(1-1-1-1+1+1) = 0$. Nous allons prochainement montrer que $\tilde{\rho}^3$ est irréductible ; nous obtiendrons les mêmes conclusions.

⋄ **Nous utilisons le corollaire suivant afin de tester l'équivalence de deux représentations :**

Corollaire 5.6. Deux représentations (ρ, V) et (ρ', V') d'un groupe G sont équivalentes si et seulement si leurs caractères sont égaux, c'est-à-dire $\chi_V = \chi_{V'}$.

Preuve. Soient $V_1, \ldots, V_m$ les irréductibles distincts apparaissant dans les décompositions de V et V' ; alors $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i^{\oplus a_i}$ et $V' = \bigoplus_{i=1}^m V_i^{\oplus b_i}$ pour des a_i, $b_i \in \mathbf{N}$ (certains potentiellement nuls). Alors :

$$\chi_V = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{V_i} \quad \text{et} \quad \chi_{V'} = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{V_i}$$

Si $\rho \simeq \rho'$ alors $a_i = b_i$ pour tout i et donc $\chi_V = \chi_{V'}$. Réciproquement, si $\chi_V = \chi_{V'}$ alors $a_i = b_i$ pour tout i car les χ_{V_i} sont orthonormaux et donc linéairement indépendants. Ainsi $\rho \simeq \rho'$. □

Exemple 5.7. Ainsi les représentations de la table 1 sont toutes distinctes.

$\diamond$ **Nous utilisons le corollaire suivant afin de vérifier qu'une représentation est irréductible :**

Corollaire 5.8. Soit (ρ, V) une représentation d'un groupe. Si χ désigne le caractère de celle-ci alors $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ si et seulement si ρ est irréductible.

Preuve. Décomposons $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_m^{\oplus a_m}$; alors $\chi = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{V_i}$ et donc $\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^m a_i^2$. Par conséquent $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ si et seulement si $a_i = 1$ pour un certain i et $a_j = 0$ pour tous les autres $j \neq i$, autrement dit si et seulement si ρ est irréductible. $\square$

Exemple 5.9. Nous venons (enfin) justifier que $\tilde{\rho}^3$ est une représentation irréductible de S_3 : si χ_3 désigne son caractère alors $\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = \frac{1}{6}(4+0+0+0+1+1) = 1$. Donc $\tilde{\rho}^3$ est irréductible.

$\diamond$ **Nous utilisons le corollaire suivant afin de vérifier que nous avons trouvé tous les représentations irréductibles d'un groupe :**

Corollaire 5.10. La somme des carrés des degrés des représentations irréductibles d'un groupe G vaut l'ordre de ce groupe.

Preuve. Nous faisons agir G sur un ensemble fini X ; soit (ρ, V) la représentation régulière (autrement dit $X = G$). L'action de G permute les vecteurs d'une base fixée de V. Pour une base $(e_x)_{x \in X}$, l'action d'un élément $s \in G$ correspond à une matrice dont les entrées valent 0 ou 1. Pour une matrice donnée, une entrée sur la diagonale vaut 1 ssi $e_{sx} = e_x$ et 0 sinon. Par conséquent $\chi_V(s)$ est égal au nombre d'éléments de X fixés par s. Or s ne fixe aucun élément de G pour tout $s \neq 1$. Donc :

$$\mathrm{Tr}(\rho_s) = \begin{cases} |G| & \text{si } s = 1 \\ 0 & \text{si } s \neq 1. \end{cases}$$

Soit (α, A) une représentation irréductible de G et soit (β, B) une autre représentation de G. Alors B se décompose de façon unique en $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_m$ avec de possibles répétitions parmi les irréductibles B_i. Donc $\langle \chi_A, \chi_B \rangle = \sum_{i=1}^m \langle \chi_A, \chi_{B_i} \rangle$. Pour tout produit hermitien individuel nous avons :

$$\langle \chi_A, \chi_{B_i} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } A \simeq B_i \\ 0 & \text{si } A \not\simeq B_i. \end{cases}$$

Donc $\langle \chi_A, \chi_{B_i} \rangle$ est exactement le nombre de fois que A apparaît dans la décomposition de B ; nous appelons cela la *multiplicité* de α dans β.

Pour la représentation régulière (ρ, V), nous avons une unique décomposition en irréductibles distincts $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_m^{\oplus a_m}$. Alors :

$$a_i = \langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_{V_i}(s)} \chi_V(s) = \frac{1}{|G|} \overline{\chi_{V_i}(1)} |G| = \dim V_i.$$

Chaque irréductible apparaît dans la représentation régulière autant de fois que son degré. Noter que toutes les représentations irréductibles sont contenues dans la représentation régulière. Par conséquent :

$$\chi_V(1) = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{V_i}(1) = \sum_{i=1}^m \dim V_i \chi_{V_i}(1) = \sum_{i=1}^m (\dim V_i)^2 = |G|.$$

$\square$

Exemple 5.11. Les représentations irréductibles de S_3 sont la représentation triviale ρ^1, la représentation signée ρ^2 et la représentation standard $\tilde{\rho}^3$ car $|\mathrm{S}_3| = 1^2 + 1^2 + 2^2$.

6 Groupes abéliens finis

Nous étudions le cas particulier de la théorie des représentations des groupes finis abéliens. Un premier résultat est que toute représentation irréductible est de degré 1 ; en témoigne le résultat suivant :

Théorème 6.1. Toute représentation irréductible d'un groupe abélien fini est de degré 1.

PREUVE. Soit (ρ, V) une représentation irréductible d'un groupe abélien fini G. Comme $\rho_s \circ \rho_t = \rho_t \circ \rho_s$ pour tous s, $t \in G$, nous pouvons appliquer le lemme de Schur au G-isomorphisme $\rho_s \colon V \to V$. Dès lors $\rho_s = \lambda_s \operatorname{Id}_V$ pour un $\lambda_s \in \mathbf{C}$. Tout sev W de V est alors G-invariant et, comme (ρ, V) est irréductible, $W = 0$ ou $W = V$. Si nous supposons que $\dim V > 1$ alors l'engendré d'un élément d'une base V est un sev de V et est G-invariant. Cela ne peut se produire de par ce qui a été dit. Donc $\dim V = 1$. □

Remarque 6.2. Toutes les matrices des représentations irréductibles commutent, ce qui vient imiter la commutativité de G dans $\mathrm{GL}(V)$.

Par conséquent les représentations irréductibles d'un groupe abélien fini G sont les morphismes de groupes $\rho \colon G \to \mathbf{C}^\times$. Puisque G est fini, $\rho_s^n = \rho_1 = 1 \in \mathbf{C}$ pour tous $s \in G$; où n désigne l'ordre de G. Donc $\mathrm{Im}(\rho) \subseteq \mu_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de 1 dans $\mathbf{C}$. Nous appelons caractères de dimension 1 ces morphismes. **Attention, un caractère de dimension 1 n'est pas à proprement parler un caractère mais une représentation de degré 1.**

Définition 6.3. Un *caractère (de dimension 1)* d'un groupe abélien fini G est un morphisme de groupes $\chi \colon G \to S^1(\mathbf{C}) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$.

Exemple 6.4. Nous étudions les groupes d'ordre 4. Ces groupes sont abéliens puisque $4 = 2^2$. À isomorphe près, les seuls groupes abéliens d'ordre 4 sont $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Ces groupes admettent quatre représentations / caractères irréductibles (car $4 = 1 + 1 + 1 + 1$) de degré 1. Au moyen des techniques données lors du paragraphe précédent nous déduisons leur table des caractères :

$\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	0	1	2	3
ρ_1	1	1	1	1
ρ_2	1	-1	1	-1
ρ_3	1	i	-1	$-i$
ρ_4	1	$-i$	-1	i

$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
ρ_1	1	1	1	1
ρ_2	1	1	-1	-1
ρ_3	1	-1	1	-1
ρ_4	1	-1	-1	1

TABLE 2 – Table des caractères des groupes d'ordre 4

Définition 6.5. Le *groupe dual* $\hat{G}$ d'un groupe abélien fini G est le groupe des morphismes $G \to S^1(\mathbf{C})$ où la multiplication est définie composante par composante.

Remarque 6.6. L'élément neutre de $\hat{G}$ est le caractère trivial $\chi(s) = 1$. Noter également que $\hat{G}$ est abélien car $G \subseteq \mathbf{C}^\times$.

Théorème 6.7. Soit $G = \langle a \rangle$ un groupe cyclique d'ordre n ; alors $G \simeq \hat{G}$.

PREUVE. Soit $\chi \colon G \to S^1(\mathbf{C})$ le caractère donnée par $a \mapsto \zeta_n$. Soit $\psi \in \hat{G}$; alors $\psi(a) = \zeta_n^k$ pour un certain $k \leq n$. Ainsi $\psi(a) = \chi(a)^k$ et donc $\psi = \chi^k$. Par conséquent $\hat{G} = \langle \chi \rangle$ est cyclique. Comme toute représentation est de degré 1, alors $|G| = |\hat{G}| = n$ et donc $G \simeq \hat{G}$. □

Corollaire 6.8. Si G est un groupe abélien fini alors $G \simeq \hat{G}$.

PREUVE. Soit χ un caractère de $A \times B$ un produit de groupes cycliques. Nous définissons les caractères χ_A et χ_B de A et B respectivement par $\chi_A(a) = \chi(a, 1)$ et $\chi_B(b) = \chi(1, b)$. Alors :

$$\chi(a, b) = \chi((a, 1)(1, b)) = \chi_A(a)\chi_B(b).$$

Ceci définit une flèche $A \hat{\times} B \to \hat{A} \times \hat{B}$. Si χ_B et χ_B sont les caractères triviaux alors χ l'est aussi puisque $\chi(a,b) = \chi_A(a)\chi_B(b) = 1$. Soit ψ un autre caractère de $A \times B$ avec ψ_A et ψ_B définit comme avant ; alors :

$$\psi(a,b)\chi(a,b) = \psi_A(a)\psi_B(b)\chi_A(a)\chi_B(b) = (\psi_A\chi_A)(a)(\psi_B\chi_B)(b) = (\psi\chi)(a,b).$$

Cette flèche est donc un morphisme ; et même un isomorphisme par le résultat précédent. Nous étendons cet isomorphisme à un produit fini de groupes cycliques et nous concluons au moyen du théorème fondamentale des groupes abéliens. □

Remarque 6.9. L'isomorphisme du théorème 6.7 n'est pas canonique : il dépend du choix d'une racine primitive n-ième de 1 dans $\mathbf{C}$. En revanche, le bidual (dual du dual) de G est canoniquement isomorphe à G. Noter l'analogie avec le cas des espaces vectoriels.

Proposition 6.10. Soit G un groupe abélien fini ; alors $\hat{\hat{G}}$ est canoniquement isomorphe à G.

Preuve. La flèche naturelle $F\colon G \to (\hat{G} \to S^1(\mathbf{C}))$ est $s \mapsto (\chi \mapsto \chi(s))$. Nous pouvons montrer que $F(st) = F(s)F(t)$ pour tous s, $t \in G$. Notons également que $F(1) = 1$ est le caractère trivial. Soit maintenant $s \in \mathrm{Ker}(F)$; alors $\chi(s) = s$ pour tout $\chi \in \hat{G}$ et donc $s = 1$. Ainsi F est injective. Elle est également surjective car G et son bidual sont de même ordre. □

Références

[Ser77] Jean-Pierre Serre. *Linear representations of finite groups.* T. 42. Graduate texts in mathematics. Springer, 1977, p. I-X, 1-170. isbn : 978-3-540-90190-7.

[FH91] William Fulton et John Harris. *Representation Theory : A First Course.* New York : Springer, 1991.

[Ste09] Benjamin Steinberg. *Representation Theory of Finite Groups.* 2009. url : `https://users.metu.edu.tr/sozkap/513-2013/Steinberg.pdf`.

[Kan11] David Kang. *Group representations and character theory.* 2011. url : `http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/KangD.pdf`.

[Con14] Keith Conrad. *Characters of Finite Abelian Groups.* 2014. url : `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/charthy.pdf`.

[Tan14] Shaun Tan. *Representation theory for finite groups.* 2014. url : `http://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Tan.pdf`.