Notes sur les représentations $\mathbf{C}$-linéaires des groupes finis

Martin Debaisieux

Dernière compilation le 7 décembre 2024

Les représentations d'un groupe décrivent ses éléments en termes d'automorphismes linéaires. La théorie des représentations permet ainsi de réduire des questions d'algèbre sur les groupes à des questions d'algèbre linéaire.

Table des matières

Dans tout ce document, nous considérons des espaces vectoriels sur le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$, dont le choix est classique et motivé par ses bonnes propriétés (par ex. : algébriquement clos, de caractéristique nulle).

※ Théorie des représentations

1.1 Définition, exemples et catégorie associée

Définition 1.1. Une représentation $\mathbf{C}$-linéaire d'un groupe G est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel muni d'une action $\mathbf{C}$-linéaire de G.

Autrement dit, un tel objet est une paire (V, ρ) formée d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel V et d'un morphisme de groupes $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$. Quand V est de dimension finie, le choix d'une base de V induit une "expression" matricielle de l'action de G sur V qui détermine la représentation.

Exemple 1.2. Étant donné un groupe G, on peut toujours lui associer une représentation (mais elle n'est pas très intéressante) sur un espace vectoriel V en considérant le morphisme trivial $G \to \mathrm{Aut}(V)$.

Exemple 1.3. Soit X un ensemble fini à n éléments sur lequel un groupe G agit. Soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n dont on indice une base $(e_x)_{x\in X}$ par X. Le morphisme obtenu en posant $\rho(g)(e_x) = e_{g.x}$ pour tous $g \in G$ et $x \in X$ est appelée représentation de permutation de G associée à X.

Nous considérerons des espaces vectoriels de dimension finie, ce qui n'est bien souvent pas restrictif [Ser77, p.4]. Ce document étant une introduction en la matière, nous travaillerons exclusivement avec des groupes finis.

Définition 1.4. Le degré d'une représentation $\mathbf{C}$-linéaire est la dimension de l'espace vectoriel sous-jacent.

Exemple 1.5. Les représentations de degré 1 d'un groupe fini G sont faciles à décrire. Il s'agit des morphismes de groupes $G \to \mathbf{C}^\times$ et puisque G est d'ordre fini, leur image prend place dans $\mu_\infty(\mathbf{C})$ les racines de l'unité dans $\mathbf{C}$. On appelle représentation unité la représentation triviale de degré 1 de G.

Exemple 1.6. Étant donné un groupe G et un ensemble fini X, la représentation de permutation de G associée à X est de degré la cardinalité de X.

Exemple 1.7. Soit D_{2n} le groupe diédral à $2n$ éléments, engendré par σ et τ tels que $\sigma^2 = 1$, $\tau^n = 1$ et $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{-1}$. Ce groupe agit sur le n-gône régulier et induit une action sur $\mathbf{C}^2$ (une représentation de degré 2) dont l'expression dans sa base standard est

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.8. Soit S_3 le groupe symétrique sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Ce groupe est le plus petit non abélien. Dans un certain sens (vu plus tard), nous donnons tout ce qu'il faut pour construire toutes ses représentations :

(1) La représentation triviale $(\mathbf{C}, \rho_1)$ de l'Exemple 1.2, qui est de degré 1.

(2) La représentation alternée $(\mathbf{C}, \rho_2)$ où $\rho_2 \colon \mathrm{S}_3 \to \mathbf{C}^\times$ est donnée par $\sigma \to \mathrm{sign}(\sigma)$, qui est une représentation de degré 1.

(3) La représentation de permutation $(\mathbf{C}^3, \rho_3)$ associée à $\{1, 2, 3\}$ de l'Exemple 1.3, qui est une représentation de degré 3.

Définition 1.9. Une sous-représentation d'une représentation $\mathbf{C}$-linéaire (V, ρ) d'un groupe G est un sous-$\mathbf{C}$-espace vectoriel de V invariant sous l'action de G.

Exemple 1.10. Soient G un groupe et H l'un de ses sous-groupes normaux. Partant d'une représentation (V, ρ) de G, on peut munir les points fixes V^H de V sous l'action de H d'une action de G via le morphisme $G \to \mathrm{Aut}(V^H)$ donné par $g \mapsto \rho(g)$. Il est bien défini par normalité de H dans G. La paire obtenue est une sous-représentation de (V, ρ), triviale quand $H = G$.

Exemple 1.11. La représentation de permutation d'un groupe fini G associée à $X = G$ est appelée représentation régulière de G. Considérons V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel dont une base est $(e_g)_{g \in G}$. Le point $s := \sum_{g \in G} e_g$ est fixe sous l'action de G et par conséquent $\langle s \rangle$ est une sous-représentation triviale de la représentation régulière de G.

La notion de représentations de permutation semble dépendante du choix d'une base d'espace vectoriel. Nous allons à présent définir la notion de morphisme entre représentations d'un même groupe, et voir que derrière ce choix se cache un isomorphisme.

Définition 1.12. Un morphisme $(V_1, \rho_1) \to (V_2, \rho_2)$ entre représentations $\mathbf{C}$-linéaires d'un groupe G est une application $\mathbf{C}$-linéaire $V_1 \to V_2$ qui commute à l'action de G, c'est-à-dire telle que $f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$ pour tout $g \in G$.

L'application identité sur une représentation est un morphisme, la composition de morphismes de représentations est un morphisme et l'on obtient ainsi pour tout groupe G une catégorie abélienne dont les objets sont les représentations $\mathbf{C}$-linéaires de G et les morphismes sont ceux définis ci-avant. Deux représentations sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme entre-elles.

Exercice 1.13. Montrer que le noyau (resp. l'image) d'un morphisme de représentations est une sous-représentation de son domaine (resp. codomaine).

Nous terminons cette section en présentant des constructions classiques auprès des espaces vectoriels et discutons de l'action résultante. Pour cela, on se donne deux représentations (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) d'un groupe G. La somme directe $V_1 \oplus V_2$ est une représentation de G via l'action naturelle $\rho_1 \oplus \rho_2$, de degré la somme des degrés qui y contribuent. Il en va de même si l'on remplace $\oplus$ par $\otimes_{\mathbf{C}}$, de degré le produit des degrés qui y contribuent. Le dual $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbf{C})$ d'une représentation (V, ρ) de G est aussi une représentation, mais dont la définition est plus sophistiquée. On veut une structure (V^*, ρ^*) telle que

$$\langle \rho^*(g)(\eta), \rho(g)(v)\rangle = \langle \eta, v\rangle$$

pour tous $g \in G$, $\eta \in V^*$ et $v \in V$. Cela nous requiert de poser $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^{\mathrm{t}}$ pour tout $g \in G$. On laisse les lecteurs vérifier que l'identité précédente est vérifiée. Grâce à cela, on peut mettre une structure sur $\mathrm{Hom}(V_1, V_2) = V_1^* \otimes_{\mathbf{C}} V_2$, en faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_1(g)", "\wr"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)", "\wr"'] \\ V_1 \arrow[r, "g\cdot f"] & V_2 \end{tikzcd}$$

pour toute application $\mathbf{C}$-linéaire $f\colon V_1 \to V_2$ et tout $g \in G$. Noter que les points fixes de $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ sous cette action sont les morphismes $(V_1, \rho_1) \to (V_2, \rho_2)$.

Théorème 1.14. Soient (V, ρ) une représentation d'un groupe G et W l'une de ses sous-représentations. Alors, il existe une sous-représentation W^0 de (V, ρ) telle que $V = W \oplus W^0$.

Démonstration. Considérons W' un complémentaire de W dans V et soit $\pi\colon V \to W$ la projection de V sur W parallèlement à W'. Soit π^0 la moyenne

$$\pi^0 := \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \rho(g) \circ \pi \circ \rho(g^{-1}).$$

Étant donné que π envoie les éléments de V dans W et que W est invariant à l'action de G, la moyenne π^0 est une flèche de V dans W. On montre facilement que $\pi^0(w) = w$ pour tout $w \in W$. Par conséquent, π^0 est la projection de V sur W parallèlement à un complémentaire W^0 de W dans V. Cet espace est invariant à l'action de G car π^0 commute avec $\rho(t)$ pour tout $t \in G$. □

1.2 Irréductibilité

Définition 1.15. Une représentation (V, ρ) d'un groupe G est irréductible si les seuls sous-espaces G-invariants sont 0 et V, est réductible sinon.

Le Théorème 1.14 met en lumière un phénomène occurrant chez les représentations, qui est celui de la décomposition en sous-objets. Si (V, ρ) est une représentation, on a toujours $V = V \oplus 0$. Quand il s'agit de la seule décomposition possible, on parle donc de représentation irréductible.

Exemple 1.16. Toute représentation de degré 1 est nécessairement irréductible. Pour les groupes non abéliens, il existe toujours au moins une représentation irréductible de degré $\geqslant 2$ (voir Théorème 2.16).

Théorème 1.17. Toute représentation est la somme directe de sous-représentations irréductibles.

Démonstration. Considérons (V, ρ) une représentation d'un groupe G et procédons par induction sur son degré. Si $V = 0$, alors il n'y a rien à démontrer. Supposons que $\dim(V) \geqslant 1$ et que V n'est pas irréductible (trivial sinon). Nous écrivons $V = V_1 \oplus V_2$ avec $\max\{\dim(V_1), \dim(V_2)\} < \dim(V)$. L'hypothèse d'induction permet d'écrire V_1 et V_2 comme somme directe de représentations irréductibles et donc V aussi. □

Exemple 1.18. Revenons à la situation de S_3 décrite en 1.8 et reprenons les notations que nous y avions posées. Bien sûr, les représentations (1) et (2) sont irréductibles. Ce n'est pas le cas de (3) : posons $V_1 := \langle (1,1,1) \rangle$ et $V_2 := \{(a,b,c) \in \mathbf{C}^3 \mid a+b+c = 0\}$ de sorte que $\mathbf{C}^3 = V_1 \oplus V_2$. Les lecteurs se convaincront que V_1 et V_2 sont invariants sous l'action de G donnée par ρ_3. Nous écrivons les éléments de l'image de ρ_3 sous forme matricielle dans la base réunion :

$$B := \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \right\} \sqcup \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1-,1) \right\}$$

le choix de cette base n'est pas anodin, elle diagonalise par bloc toutes les expressions matricielles de l'action en une matrice 1×1 et une matrice 2×2 :

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [1\,3] \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad [1\,2\,3] \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$[1\,2] \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad [2\,3] \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad [1\,3\,2] \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Cela suggère que (3) est réductible ; elle peut être décomposée en deux représentations dont l'une est triviale. En isolant les matrices 2×2, on obtient une représentation de degré 2, appelée représentation standard de S_3. Nous verrons par la suite qu'elle est irréductible.

Proposition 1.19 (Lemme de Schur)**.** Soient (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) deux représentations $\mathbf{C}$-linéaires irréductibles d'un groupe et soit $f : (V_1, \rho_1) \longrightarrow (V_2, \rho_2)$ un morphisme.

(a) Soit f est un isomorphisme, soit $f = 0$.

(b) Si $(V_1, \rho_1) = (V_2, \rho_2)$, alors f est une homothétie.

Démonstration. (a) Supposons que $f \neq 0$ et montrons que nécessairement f est un isomorphisme. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ est une sous-représentation de (V_1, ρ_1) qui est irréductible, on a soit $\mathrm{Ker}(f) = 0$, soit $\mathrm{Ker}(f) = V_1$. De par notre hypothèse le second n'est pas possible. De la même manière on montre que $\mathrm{Im}(f) = V_2$ et ainsi f est un morphisme bijectif, *i.e.* un isomorphisme (exercice).

(b) Comme $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, f admet une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$. Puisque les applications f et $\lambda\mathbf{1}$ sont des morphismes, il en va de même de $f - \lambda\mathbf{1}$. Quoi qu'il arrive, on déduit de (a) que $f = \lambda\mathbf{1}$. □

Corollaire 1.20. La décomposition en sous-représentations irréductibles du Théorème 1.17 est unique à isomorphisme et ordre des termes près.

Démonstration. En appliquant le lemme de Schur à $\mathbf{1}$ sur la représentation, on a une correspondance entre les termes apparaissant dans deux de ses décompositions. □

※ Théorie des caractères

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de caractère d'une représentation **C**-linéaire d'un groupe, une application qui associe à chaque élément du groupe la trace de l'automorphisme correspondant. Nous verrons que cette notion est un outil précieux dans l'étude des représentations d'un groupe donné. Grâce à celle-ci, nous pourrons facilement tester si une représentation est irréductible, vérifier que deux représentations sont isomorphes, et même s'assurer que nous avons trouvé toutes les représentations irréductibles d'un groupe.

2.1 Définition et exemples

Définition 2.1. Le caractère χ_ρ d'une représentation **C**-linéaire (V, ρ) d'un groupe donné G est l'application $G \longrightarrow \mathbf{C}\colon g \longmapsto \operatorname{tr}(\rho(g))$.

Exemple 2.2. Il est d'usage de présenter les caractères d'un groupe sous forme d'un tableau, que l'on appelle table des caractères. Ce tableau comprend autant de lignes que le groupe a de représentations irréductibles (non isomorphes), et il a autant de colonnes que le groupe a d'éléments. Pour S_3 on a :

Caractères irréductibles de S_3	e	[1 2]	[1 3]	[2 3]	[1 2 3]	[1 3 2]
Représentation triviale	1	1	1	1	1	1
Représentation alternée	1	−1	−1	−1	1	1
Représentation standard	2	0	0	0	-1	-1

Table 1 – Table des caractères de S_3.

Nous montrerons à la section suivante qu'il s'agit bel et bien de la table des caractères de S_3, c'est-à-dire que la représentation standard est irréductible et qu'il n'y en a plus d'autres. Noter que l'on peut lire le degré de chaque représentation grâce à la colonne du neutre.

Exercice 2.3. Soit (V, ρ) une représentation d'un groupe G et soit χ_ρ son caractère. En utilisant les propriétés de la trace, montrer que $\chi_\rho(e) = \dim(V)$ et que $\chi_\rho(g^{-1})$ est le conjugué complexe de $\chi_\rho(g)$ pour tout $g \in G$. Pour tous g et $h \in G$, montrer aussi que $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$.

Proposition 2.4. Soient (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) deux représentations d'un groupe G de caractères respectifs χ_1, χ_2.

(a) Le caractère χ de la représentation somme directe $(V_1 \oplus V_2, \rho_1 \oplus \rho_2)$ est la somme ponctuelle $\chi_1 + \chi_2$.

(b) Le caractère $\varkappa$ de la représentation produit tensoriel $(V_1 \otimes_{\mathbf{C}} V_2, \rho_1 \otimes \rho_2)$ est le produit ponctuel $\chi_1 \cdot \chi_2$.

Démonstration. On fait le travail pour (a), on procède de façon similaire pour (b). À partir d'une base B de V_1 et d'une base C de V_2, on construit une base de $V_1 \oplus V_2$ de sorte que la matrice associée à un $g \in G$ dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} M_B(\rho_1(g)) & 0 \\ 0 & M_C(\rho_2(g)) \end{pmatrix}$$

où $M_X(\rho_i(g))$ est la matrice de $\rho_i(g)$ dans la base $X \in \{B, C\}$ pour $i \in \{1, 2\}$ lorsque cela a du sens. Ainsi, le résultat est immédiat. □

Proposition 2.5. Soit (V, ρ) une représentation d'un groupe G et soit χ son caractère. Le caractère χ^* de la représentation duale (V^*, ρ^*) est le conjugué complexe ponctuel de χ.

Démonstration. La trace d'un morphisme linéaire est la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité. Pour tout $g \in G$, l'automorphisme $\rho(g)^{\mathrm{t}} \colon V^* \to V^*$ admet les mêmes valeurs propres que $\rho(g)$. Étant donné que $\rho(g)$ est d'ordre fini pour tout $g \in G$, ses valeurs propres sont sur le cercle unité où leur inverse est par conséquent leur conjugué complexe. □

Exercice 2.6. Soient (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) deux représentations d'un groupe G. À partir des résultats précédents, déterminer le caractère de $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$.

2.2 Relation d'orthogonalité

Définition 2.7. Le produit scalaire $\langle *, * \rangle$ entre deux caractères d'un groupe fini G est le produit scalaire défini pour tous caractères χ et $\varkappa$ de G par :

$$\langle \chi, \varkappa \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \varkappa(g^{-1}). \tag{1}$$

Cette notion d'orthogonalité est la clé afin de tenir toutes les promesses faites lors de l'introduction de ce chapitre. On laisse le soin aux lecteurs de vérifier que (1) donne une application bilinéaire, définie positive et symétrique. Certains auteurs utilisent le conjugué de $\varkappa(g)$ au lieu de $\varkappa(g^{-1})$, mais compte tenu de l'Exercice 2.3 il s'agit de la même quantité pour les caractères.

Théorème 2.8. Soient χ_1 et χ_2 les caractères de deux représentations irréductibles d'un groupe fini. Si les représentations sont isomorphes alors $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = 1$, et sinon $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = 0$.

Démonstration. On commence par montrer un résultat intermédiaire, que nous utiliserons pour conclure. Soit (V, ρ) une représentation d'un groupe fini G. L'application linéaire

$$f \colon V \to V^G \colon x \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)(x)$$

est bien définie, surjective et satisfait $f \circ f = f$. Il s'agit alors d'une projection et ses valeurs propres appartiennent donc à $\{0, 1\}$. On en déduit que la dimension de V^G vaut la trace de f. Soient maintenant (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) deux représentations irréductibles de G de caractère respectif χ_1 et χ_2. Nous savons du lemme de Schur 1.19 que le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des morphismes entre ces deux espaces est une droite s'ils sont isomorphes, est nul sinon. Son caractère est $\chi := \chi_1^* \chi_2$ avec χ_1^* le caractère dual. Alors,

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } (V_1, \rho_1) \simeq (V_2, \rho_2) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La dernière égalité provient du fait que l'espace des morphismes de représentations est celui des points fixes des applications linéaires et du premier résultat. □

Corollaire 2.9. Le caractère de chacune des représentations irréductibles d'un groupe fini sont deux-à-deux orthonormaux.

Exercice 2.10. Montrer que la représentation triviale et la représentation alternée du groupe S_3 ne sont pas isomorphes. En supposant que la représentation standard est irréductible, en faire de même avec elle.

Corollaire 2.11. Deux représentations d'un groupe fini sont isomorphes si et seulement si leur caractère sont égaux.

Démonstration. Considérons (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) deux telles représentations, de caractère respectif χ_1 et χ_2. On voit ces deux objets comme sous-objet de leur représentation somme directe afin d'appliquer le Théorème 1.17. On a alors une décomposition en irréductibles

$$V_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i^{\oplus e_i} \quad \text{et} \quad V_2 = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i^{\oplus f_i}$$

où les W_i sont les irréductibles de la représentation somme directe et où les $e_i, f_i \geqslant 0$ sont entiers pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On note $\varkappa_i$ le caractère de la sous-représentation irréductible W_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Si les représentations sont isomorphes, on a clairement $\chi_1 = \chi_2$. Réciproquement, étant donné que $(\varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$ est une suite orthonormale (2.9), on a nécessairement $e_i = f_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. □

Corollaire 2.12. La somme du carré du degré des représentations irréductibles non isomorphes d'un groupe fini est son ordre.

Démonstration. Soit G un groupe fini. On peut montrer que toutes ses représentations irréductibles sont des sous-représentations de sa représentation régulière. Pour cette raison, considérons (V, ρ) la représentation régulière de G et notons χ son caractère. On rappelle qu'il y a une base $B \coloneqq (e_g)_{g \in G}$ de V telle que

$$\rho(g)(e_h) = e_h$$

pour tous g et $h \in G$. Lorsque g n'est pas l'élément neutre de G, on a $gh \neq h$ pour tout $h \in G$ et donc la diagonale principale de la matrice de $\rho(g)$ dans la base B est nulle. Par conséquent $\chi(g) = 0$. En utilisant une fois encore le Théorème 1.17, on a une décomposition en irréductibles V_i de multiplicité $a_i \geqslant 1$. Joint au Théorème 2.8, on trouve

$$a_i = \langle \chi, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi_i(g^{-1}) = \chi_i(e) = \dim(V_i) \tag{2}$$

pour tout i, où χ_i est le caractère de l'irréductible V_i. Étant donné que la représentation régulière de G est de degré $|G|$, on déduit de (2) le résultat. □

Corollaire 2.13. Soit χ le caractère d'une représentation d'un groupe fini, alors cette représentation est irréductible si et seulement si $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Démonstration. Considérons (V, ρ) une représentation de caractère χ. On applique à nouveau le Théorème 1.17 afin d'obtenir une décomposition en irréductibles V_i de multiplicité $a_i \geqslant 0$ et l'on a

$$\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Ce produit scalaire vaut 1 si et seulement si $a_i = 1$ pour un certain i et $a_j = 0$ pour tous les $j \neq i$, autrement dit si et seulement si (V, ρ) est irréductible. □

Exemple 2.14. Nous utilisons les trois corollaires précédents afin de montrer que la Table 1 est la table des caractères de S_3. Chacune des lignes provient d'un caractère irréductible par 2.13. Ces caractères ne sont pas isomorphes par 2.11. Finalement, il n'y en a pas d'autres car $1^2 + 1^2 + 2^2 = 3!$ par 2.12.

Exercice 2.15. Déterminer la table des caractères d'un groupe d'ordre 1, ensuite d'un groupe d'ordre 2. Que sait-on dire pour un groupe d'ordre $n \geqslant 3$?

2.3 Étude des groupes abéliens finis (inachevé)

Nous terminons ces notes en étudiant brièvement la théorie des représentations des groupes finis abéliens. Celle-ci est tout particulièrement simple car les représentations irréductibles de tels groupes sont de degré 1, ce qui nous permet par ailleurs de les aborder comme des caractères.

Théorème 2.16. Soit G un groupe fini, alors G est un groupe abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

Démonstration. Nous montrons l'implication dans le sens de lecture. Soit (V, ρ) une représentation irréductible de G. Pour tout $g \in G$, le lemme de Schur 1.19 nous dit que $\rho(g) = \lambda_g \mathbf{1}$ pour un certain $\lambda_g \in \mathbf{C}$. Tout sous-espace vectoriel de V est alors une sous-représentation de (V, ρ). Par irréductibilité, on en déduit que V est une droite. Pour l'implication réciproque, on redirige vers [Ser77, p.25]. □

Les représentations irréductibles d'un groupe abélien fini G sont les morphismes de G dans $\mu_\infty(\mathbf{C})$ et même plus exactement dans $\mu_n(\mathbf{C})$ où n désigne l'ordre de G. Le caractère d'une telle représentation n'est autre que la représentation en question et, pour cette raison, on appelle aussi (mais on ne le fera pas ici) les représentations de degré 1 des caractères.

Exemple 2.17. Les groupes d'ordre 4 sont abéliens et, à isomorphisme près, il n'y a que $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Ces groupes admettent quatre caractères irréductibles car $4 = 1+1+1+1$, à valeurs dans $\mu_4(\mathbf{C})$ pour le premier et $\mu_2(\mathbf{C})$ pour le deuxième. Par l'étude de la précédente section, nous avons :

Caractères irréductibles de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
Représentation triviale	1	1	1	1
Représentation numéro 2	1	-1	1	-1
Représentation numéro 3	1	i	-1	$-i$
Représentation numéro 4	1	$-i$	-1	i

Caractères irréductibles de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
Représentation triviale	1	1	1	1
Représentation numéro 2	1	1	-1	-1
Représentation numéro 3	1	-1	1	-1
Représentation numéro 4	1	-1	-1	1

Table 2 – Table des caractères des groupes d'ordre 4.

Définition 2.18. Le groupe dual d'un groupe fini abélien G est le groupe abélien $\widehat{G}$ des morphismes de groupes $G \longrightarrow \mu_\infty(\mathbf{C})$, autrement dit des représentations irréductibles de G, avec la multiplication ponctuelle.

Étudier le dual d'un groupe fini abélien G, c'est étudier la table des caractères du groupe G. Pour cela, on a déjà les outils 2.11, 2.12 et 2.13. Nous allons voir que nous pouvons aller bien plus loin dans cette étude, essentiellement parce que le dual de G lui est isomorphe. Cet isomorphisme n'est pas canonique, mais tout comme avec les espaces vectoriel, on l'a en passant au bidual.

Théorème 2.19. Soit G un groupe cyclique fini, alors son dual lui est isomorphe. En particulier, le dual de G est cyclique.

Démonstration. Soient $g \in G$ un générateur de G et n son ordre. On choisit une racine primitive n-ième de l'unité $\zeta_n \in \mathbf{C}$ et l'on pose $\chi\colon G \to \mu_n(\mathbf{C})$ le morphisme donné par $\chi(g) = \zeta_n$. Si $\varkappa$ est un élément du dual de G, on a alors $\varkappa(g) = \zeta_n^m$ pour un certain $m \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et donc $\varkappa = \chi^m$. Dès lors, le dual de G est cyclique. Pour conclure, il suffit de remarquer que G et son dual ont le même ordre. □

Corollaire 2.20. Soit G un groupe abélien fini, alors son dual lui est isomorphe.

Démonstration. Par le théorème fondamentale des groupes finis abéliens [PWiki], on peut décomposer G en un produit fini de groupes cycliques. Afin de conserver des notations lisibles, supposons $G = C_1 \times C_2$ est le produit de deux groupes cycliques (l'argument reste le même pour plus). Si l'on montre que

$$\widehat{G} = \widehat{C_1 \times C_2} \simeq \widehat{C_1} \times \widehat{C_2}$$

alors on obtiendra la conclusion du résultat grâce au Théorème 2.19. Étant donné un morphisme $\chi\colon G \to \mu_\infty(\mathbf{C})$, on peut construire des morphismes $\chi_1\colon C_1 \to \mu_\infty(\mathbf{C})$ et $\chi_2\colon C_2 \to \mu_\infty(\mathbf{C})$ en posant $\chi_1(c_1) := \chi(c_1, 1)$ et $\chi_2(c_2) := \chi(1, c_2)$ pour tout élément $(c_1, c_2) \in C_1 \times C_2$. De cette manière, on a

$$\widehat{C_1 \times C_2} \to \widehat{C_1} \times \widehat{C_2}\colon \chi \mapsto (\chi_1, \chi_2).$$

On vérifie facilement que cette application est un morphisme de groupes et qu'elle est injective. Puisque ces deux groupes sont de même ordre fini, nous trouvons un isomorphisme souhaité. □

Théorème 2.21 (Dualité de Pontryagin)**.** Soit G un groupe abélien fini, son bidual lui est canoniquement isomorphe.

Démonstration. Nous montrons que l'application naturelle $G \to \operatorname{Hom}(\widehat{G}, \mu_\infty(\mathbf{C}))$ par $g \mapsto (\chi \mapsto \chi(g))$ est un isomorphisme de groupes. On montre facilement qu'il s'agit d'un morphisme. Si $g \in G$ est dans son noyau, alors $\chi(g) = 1$ en tout χ du dual de G et donc $g = 1$. On conclut à nouveau en utilisant l'argument qu'une application injective entre ensembles de même cardinalité finie est bijective. □

Documentation et références

[1] Keith Conrad – *Characters of Finite Abelian Groups*, copie disponible sur https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/charthy.pdf (2014).

[2] William Fulton, John Harris – *Representation Theory: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics **129**, Springer (1991).

[3] David Kang – *Group representations and character theory*, copie disponible sur http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/KangD.pdf (2011).

[Ser77] Jean-Pierre Serre – *Linear representations of finite groups*, Graduate Texts in Mathematics **42**, Springer (1977).

[4] Benjamin Steinberg – *Representation Theory of Finite Groups*, course notes, copie disponible sur https://users.metu.edu.tr/sozkap/513-2013/Steinberg.pdf (2009).

[5] Shaun Tan – *Representation theory for finite groups*, copie disponible sur http://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Tan.pdf (2014).

[PWiki] *Fundamental Theorem of Finite Abelian Groups*, ProofWiki, consulté en décembre 2024, https://proofwiki.org/wiki/Fundamental_Theorem_of_Finite_Abelian_Groups.